Die Schwarzschild-Näherung der Allgemeinen Relativitätstheorie

Teil 1: Die klassische, nichtrelativistische Theorie

Michael Fröhner

Juni 2017

Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie ist mehr als 100 Jahre alt und hat die Gedankenwelt der Physik – wie auch andere moderne naturwissenschaftliche Theorien – nachhaltig beeinflusst und verändert. Gemeinsam mit der Quantenphysik ist die Relativitätstheorie auf dem Gebiet der Theoretischen Physik sicher eine der bedeutendsten Entwicklungen des 20. Jahrhunderts mit vielen Querverbindungen in andere wissenschaftliche Bereiche.

Wir wollen mit den nachfolgenden Betrachtungen einen kleinen Einblick in die Elemente dieser faszinierenden Theorie geben und auf dem Gebiet der Astrophysik für unser Sonnensystem wesentliche Unterschiede zu der klassischen (Newtonschen) Betrachtungsweise herausarbeiten. Im Fokus der Betrachtungen steht dabei das Phänomen der *Gravitation*, derjenigen Eigenschaft, die jedem massebehafteten Körper immanent ist.

1 Newtonsche Gravitation und die Feldgleichungen

Eine Massendichte $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ erzeugt ein Gravitationspotenzial $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch die Beziehung

$$\Delta\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = 4\pi G\rho(\vec{\boldsymbol{r}}), \tag{1.1}$$

Die Gleichung heißt *Potenzialgleichung*, Δ repräsentiert den Laplace-Operator (ein Differentialoperator 2. Ordnung), G bezeichnet die Newtonsche Gravitationskonstante.

Die Gleichung (1.1) ist elliptisch, das *Potenzial* $\Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$ ist durch $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$ und eine Randbedingung im Unendlichen (i.a. $\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) \overset{(|\vec{\boldsymbol{r}}| \to \infty)}{\longrightarrow} 0$) eindeutig bestimmt. Eine *Punktmasse* m_1 am Ort $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ erzeugt ein Potenzial

$$\Phi_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{G\ m_1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_1|}, \tag{1.2}$$

das auf ein Teilchen m_2 am Ort $\vec{\boldsymbol{r}}_2$ die folg. Kraft ausübt:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -m_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi_1(\vec{\boldsymbol{r}}_2) = -m_2 \cdot \mathbf{grad}\ \Phi_1(\vec{\boldsymbol{r}}_2). \tag{1.3}$$

Hier bezeichnet das Symbol $\boldsymbol{\nabla}$ (manchmal auch durch die Abkürzung **grad** gekennzeichnet), den sog. *Nabla-Operator* oder die Gradientenbildung. Als Ergebnis entsteht eine vektorwertige Funktion, im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem, die folgende Form annimmt:

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi(x,y,z) \quad := \quad \Big(\partial_x\Phi,\ \partial_y\Phi,\ \partial_z\Phi\Big)^T \quad = \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \frac{\partial\Phi}{\partial y},\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^T \tag{1.4}$$

Für die Bewegung von Massepunkten (Körpern) in einem Gravitationsfeld gelten in der klassischen (vorrelativistischen) Theorie nachfolgende

Newtonsche Axiome:

1. **Trägheitsprinzip (Galilei)**: In einem *Inertialsystem* bewegt sich ein kräftefreier Körper mit konstanter Geschwindigkeit (d.h. $\dot{\vec{r}}(t) = \text{const}$, $\ddot{\vec{r}}(t) = 0$ – oder er bleibt in Ruhe: $\dot{\vec{r}}(t) = 0$).
2. **Bewegungsgesetz (Newton)**: Im *Inertialsystem* gilt für die Änderung des Impulses $\vec{p} = m\vec{v}$ nach Größe und Richtung:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \text{also} \qquad \vec{F} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

3. **Kraft = Gegenkraft ("actio = reactio")**: $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$.

Für eine (idealisierte) Punktmasse (z.B. einen *Planeten* mit der Masse m_2) im Zentralfeld (z.B. der *Sonne* mit der Masse m_1) gilt folglich:

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -m_2 \cdot \nabla\Phi_1(\vec{r}_2) = +\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Hier ist $\vec{r}_j$ der Ortsvektor in einem beliebigen, kartesischen Koordinatensystem zum Körper mit dem Index $j = 1, 2$, G ist die Gravitationskonstante.

Zur Vereinfachung legen wir das Koordinatensystem mit seinem Ursprung in den das Zentralfeld erzeugenden Schwerpunkt ($\vec{r}_1 = 0$) und bezeichnen $\vec{r}_2 = \vec{r}$. Dann schreibt sich die **(Vektor-) Differentialgleichung** in der Form

$$\boxed{m_2\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = G\,m_1\,m_2\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},} \tag{1.5}$$

die im 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit dem Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ in Komponenten ausgeschrieben den drei gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung, also einem *nichtlinearen Differentialgleichungssystem*, entspricht:

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_2\,\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} & = & \dfrac{G\,m_1\,m_2\;x(t)}{\big(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\big)^{3/2}}, \\ m_2\,\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} & = & \dfrac{G\,m_1\,m_2\;y(t)}{\big(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\big)^{3/2}}, \\ m_2\,\dfrac{d^2z(t)}{dt^2} & = & \dfrac{G\,m_1\,m_2\;z(t)}{\big(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\big)^{3/2}} \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Einige Bemerkungen zu dem angegebenen Modell:

- Jede Masseanhäufung im Raum erzeugt ein Gravitationspotenzial mit einer "über alle Grenzen" reichenden Wirkung; somit entspricht die Bewegung eines Körpers um einen anderen (wegen stets vorhandener Störeinflüsse) keinem in der Natur vorkommenden realistischen Modell. Allerdings nimmt die gravitative Wirkung umgekehrt proportional zur Entfernung ab, so dass es durchaus sinnvolle Modelluntersuchungen mit wenigen Körpern, insbesondere auch zwischen zwei Körpern, geben kann.

- In einem System, wie es aber z.B. unser Sonnensystem darstellt, spielt häufig der Einfluss der "großen" Planeten eine nicht zu unterschätzende Rolle. In Mehrkörpersystemen, z.B. bei N in Wechselwirkung stehenden Körpern, entsteht dann ein gekoppeltes System von $3N$ Differentialgleichungen 2. Ordnung für die zeitabhängigen Ortsvektoren $\vec{\boldsymbol{r}}(t)_j$, $j = 1, \ldots, N$, der Form

$$m_j \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{j}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_{ij} + \vec{\boldsymbol{K}}_j, \quad j = 1, \ldots, N.$$

  Solche Systeme sind nur mit mathematischen Näherungsmethoden (z.B. mit der Störungsrechnung, durch geeignete Reihenentwicklungen, mit numerischen Methoden) behandelbar.

- Ein Sonderfall ist das sog. *Zweikörperproblem*, dem wir uns nachfolgend zuwenden wollen.

- Erwähnt werden soll auch, dass für gewisse Körper im Raum, die sich stabil auf geeigneten Bahnen bewegen, analytische Lösungsansätze möglich sind. Dies trifft z.B. auf eine Reihe (relativ großer) Asteroide, den sog. *'Griechen'* und *'Trojanern'*, zu, die sich in definiertem Abstand etwa um 60° zum Riesenplaneten versetzt auf der Jupiterbahn bewegen. Man zählt hier inzwischen mehr als 2000 registrierte und damit beobachtete und vermessene Objekte, die Durchmesser von einigen 100 Metern bis zu mehreren Kilometern aufweisen können.

1.1 Das klassische Zweikörper-Problem

Wir wollen uns dem analytisch lösbaren Fall zuwenden, indem wir ein mathematisches Modell für den Umlauf eines Körpers um ein Zentralgestirn betrachten. Das kann z.B. das System *'Sonne – (beliebiger) Planet'* oder auch eines der Systeme *'Erde – Mond'*, *'Erde – Satellit'* o.ä. sein.

Das Modellsystem soll sich frei von äußeren Kräften im Raum bewegen, was zumindest innerhalb unseres Sonnensystems (auch für Teilsysteme) ziemlich gut erfüllt ist. Diese Annahme hat zur Folge, dass der *Drehimpuls* des so definierten Zwei-Körper-Problems konstant ist, wir schreiben $\vec{\boldsymbol{\ell}} =$ const. Eine physikalisch-mathematische Erklärung für die Evidenz dieser Aussage folgt weiter unten.

Mit dieser Aussage können wir ein geeignetes zweidimensionales Koordinatensystem definieren und das kartesische System in ein *Polarkoordinatensystem* vermittels der Transformationsvorschrift

$$x(t) = r(t)\cos(\varphi(t)), \quad y(t) = r(t)\sin(\varphi(t)), \quad z(t) = 0 \tag{1.7}$$

überführen.

Die zeitliche Dynamik eines Systems von zwei in Interaktion befindlichen *Punktmassen*, also die Beschreibung der Bahnverläufe $\vec{\boldsymbol{r}}_1(t)$ und $\vec{\boldsymbol{r}}_2(t)$ als Kurven im $\mathbb{R}^3$, wird entsprechend der obigen Betrachtungen durch ein System gewöhnlicher DGl. beschrieben ($\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2, \quad |\vec{\boldsymbol{r}}| = |\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|$):

$$m_1 \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}_1 = -m_1 \cdot \nabla\, \Phi_2(\vec{\boldsymbol{r}}_1) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}^2|}\,\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2)}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}, \tag{1.8}$$

$$m_2 \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}_2 = -m_2 \cdot \nabla\, \Phi_1(\vec{\boldsymbol{r}}_2) = +G\frac{m_1 m_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}^2|}\,\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2)}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}, \tag{1.9}$$

Wir führen sog. *reduzierte Schwerpunktkoordinaten* ein:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_S = \frac{1}{m_1 + m_2}\big(m_1\vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{r}}_2\big)$$

und erhalten durch Umstellen der Formeln

$$\vec{\boldsymbol{r}}_1 = \vec{\boldsymbol{r}}_S + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{\boldsymbol{r}}, \quad \vec{\boldsymbol{r}}_2 = \vec{\boldsymbol{r}}_S + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{\boldsymbol{r}}.$$

Jetzt bewegen sich die beiden Körper mit einer "reduzierten" Masse μ um einen (fiktiven) Masseschwerpunkt $\vec{\boldsymbol{r}}_S$. Legen wir noch den Ursprung eines neu zu definierenden Koordinatensystems in diesen gemeinsamen Masseschwerpunkt, so verbleibt als Aufgabe die Lösung einer einzigen Differentialgleichung als "reduziertes" Kraftgesetz mit einer Zentralkraft:

$$\mu\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}^{\mathbf{2}}|}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|}, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}. \tag{1.10}$$

Für eine Zentralkraft gilt: Der <u>*Drehimpuls*</u> $\vec{\ell} := \mu\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}$ ist eine Erhaltungsgröße nach Betrag und Richtung, denn es gilt $\dfrac{d\vec{\ell}}{dt} = \mu\vec{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{0}$ (weil $\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} \,||\, \vec{\boldsymbol{r}}$ ist). Die Bewegung ist folglich <u>*eben*</u>.

Somit können die drei (gew.) DGl. (1.10) in der Ebene auf <u>zwei</u> DGl. 2. Ordnung reduziert werden. Eine weitere *Transformation in Polarkoordinaten* ermöglicht dann die Lösung der formulierten Aufgabe:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \Big(x(t),\, y(t)\Big)^T, \quad x(t) = r(t)\cos\varphi(t),\ y(t) = r(t)\sin\varphi(t) \tag{1.11}$$

Damit gilt für die Komponenten des Drehimpulsvektors $\ell_x = \ell_y = 0, \quad \ell_z = \mu r^2\dot{\varphi} = \ell = \text{const}$, d.h. $\dot{\varphi} = \ell/\mu r^2$.
Außerdem gilt der <u>*Energiesatz*</u>:

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{\boldsymbol{v}}^{\mathbf{2}} + \Phi(r) = \frac{1}{2}\mu\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) + \Phi(r) = \text{const.} \tag{1.12}$$

Aus (1.12) und dem Drehimpuls lässt sich $\dot{r} = \dot{r}(t)$ bestimmen:

$$\dot{r}(t) = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E-\Phi(r))}{\mu} - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2(t)}} \tag{1.13}$$

Die Anwendung der Kettenregel beim Übergang von der Zeit t zu dem Winkel φ als unbhängige Variable

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}$$

und die Substitution $\sigma(\varphi) := \dfrac{1}{r(\varphi)}$, was noch $\dfrac{d\sigma}{d\varphi} = -r^{-2}\dfrac{dr}{d\varphi}$ zur Folge hat, liefert schließlich die zu lösende Differentialgleichung

$$-\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu(E+A\sigma)}{\ell^2} - \sigma^2}. \tag{1.14}$$

Der Parameter A wird durch das Zentralpotenzial $\Phi(r) = -A/r$ bestimmt und enthält außer der Masse noch die Gravitationskonstante G. Die übrigen Parameter können zu den zwei Konstanten $p := \frac{\ell^2}{A\mu}$, und $\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu A^2}}$ zusammengefasst werden, so dass nach einer Vorzeichenbetrachtung und der Bildung des Quadrats von Gleichung (1.14) für den reziproken Ausdruck des Radiusvektors die Gleichung

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} \tag{1.15}$$

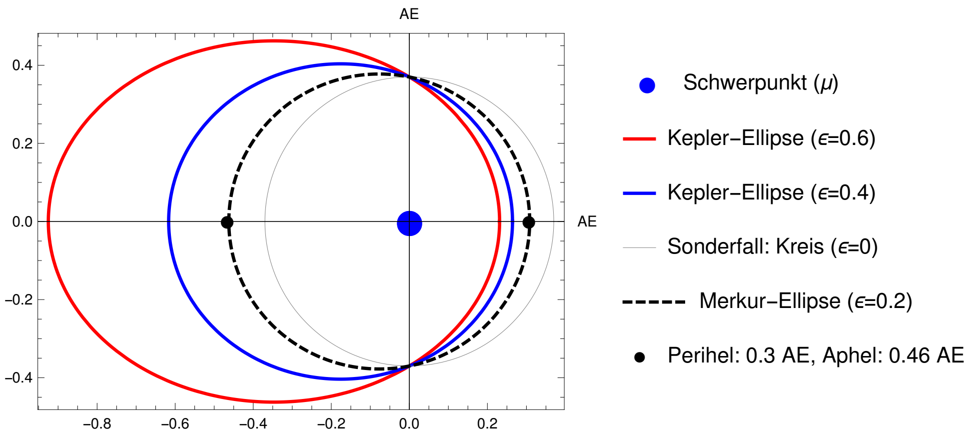

Abbildung 1.1: Kepler-Ellipsen: Im Koordinatenursprung, der mit einem Brennpunkt der Ellipsen zusammenfällt, befindet sich der reduzierte gemeinsame Masseschwerpunkt beider Körper

zu lösen ist. Mit dem Ansatz $\sigma - \frac{1}{p} = \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi - \varphi_0)$, wobei φ_0 eine beliebige (Integrations-) Konstante bezeichnet, findet man als allgemeine Lösung $\sigma = \sigma(\varphi)$ der DGl. (1.15) die Funktion

$$\boxed{\sigma - \frac{1}{p} = \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi - \varphi_0).} \tag{1.16}$$

Die Rücktransformation auf die ursprüngliche Funktion $r(\varphi)$ führt schließlich auf eine Lösungsfunktion

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)},} \tag{1.17}$$

die für $0 < \varepsilon < 1$ gerade der Polarkoordinatendarstellung einer *Ellipse* entspricht, $\varepsilon = 0$ repräsentiert den Sonderfall eines Kreises. In einem Polarkoordinatensystem sind für verschiedene Exzentrizitäten ε Beispiele für (Kepler-) Ellipsen angegeben (vgl. Abb. 1.1). Wir sehen uns schließlich noch das *effektive Potenzial* für die Bewegung der beiden Körper an:

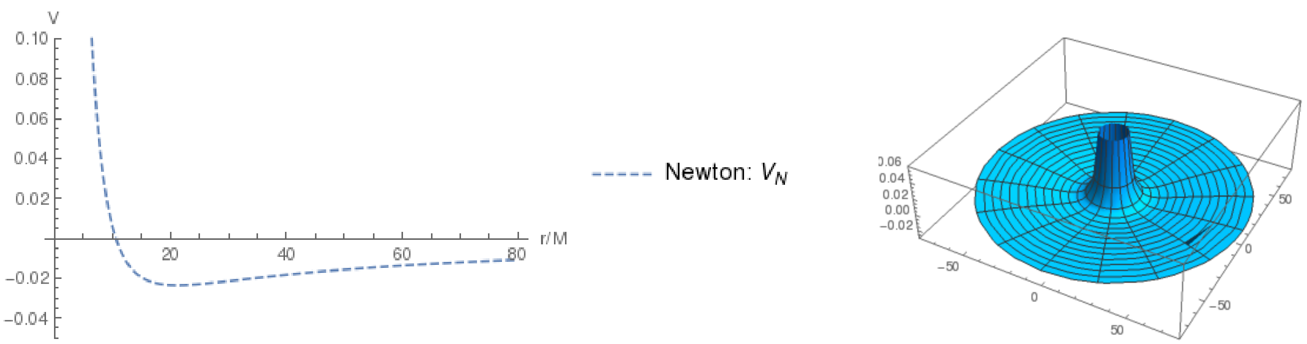

Abbildung 1.2: Effektives Potenzial: Überlagerung des Zentralpotenzials im Massenschwerpunkt mit der Energie der Zentrifugalkräfte der rotierenden Bewegung (links: $V_{\text{eff}}(r)$, rechts: rotationssymmetrische Darstellung um den Drehimpulsvektor $\vec{\ell}$)

Im zweiten Teil des Beitrags (siehe nächstes Info-Heft) werden die Betrachtungen auf das Raum-Zeit-Kontinuum in der MINKOWSKI-Metrik ausgeweitet und die relativistischen Feldgleichungen für einen sehr einfachen Sonderfall im Vakuum und unter weiteren vereinfachenden Annahmen in der SCHWARZSCHILD-Metrik gelöst.

Literatur

[1] Torsten Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie.* Springer Spektrum, 7. Auflage, 2016

[2] James B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity.* University of California, Pearson, 2003

[3] Gareth P. Alexander, *General Relativity.* University of Warwick, Lecture Notes, 2016/2017