

Die Schwarzschild-Näherung der Allgemeinen Relativitätstheorie

Teil 2: Relativistische Theorie

Michael Fröhner

August 2017

In einem ersten Teil wurde zur Vorbereitung der Thematik zunächst die klassische Newtonsche Theorie der Bewegung von Himmelskörpern unter dem Einfluss der Gravitation eines Zentralsterns herausgearbeitet. Eine Reihe von Problemen und Differenzen zwischen dieser Theorie und der Beobachtung bleibt dabei naturgemäß offen. Albert Einstein interpretierte die Gravitation als Eigenschaft des Raumes und der Veränderung seiner Geometrie in Raum und Zeit und konnte damit eine Reihe von scheinbar widersprüchlichen oder nicht interpretierbaren Erscheinungen erklären.

Wir wollen die Grundzüge der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie an einem der einfachsten Sonderfälle untersuchen, indem an Geometrie und Raum starke Einschränkungen formuliert werden, so dass die Resultate auch einem mit den Grundlagen einer Hochschulausbildung in Mathematik vertrauten Leser nachvollziehbar bleiben sollten. Den Lösungsweg hat bereits im Jahre 1916, also wenige Monate nach Veröffentlichung der physikalischen Theorie und ihrer grundlegenden mathematischen Beschreibung durch EINSTEIN, der Physiker und Astronom KARL SCHWARZSCHILD (1873 – 1916) veröffentlicht [4] und eine exakte Lösung der EINSTEINSchen Feldgleichungen unter stark restriktiven physikalischen Bedingungen gefunden.

Nachfolgend sollen einige der grundlegenden Ideen dieses als sog. SCHWARZSCHILD-Lösung bekannten Zugangs wiedergegeben werden.

2 Raum-Zeit-Kontinuum: Die Einsteinsche Theorie

Die Anwesenheit von Massen verändert den Raum und verzerrt das Koordinatensystem . . . - Vorstellen kann man sich diesen Vorgang etwa durch den Vergleich eines gleichmäßigen, rechtwinkligen Gitters in einem masselosen Teil des umgebenden Raumes mit einem durch eine anwesende Masse verzerrten Gitters, wie es das nachfolgende Bildpaar (Abb. 2) zeigt. Die (verzerrten) Gitterlinien bilden jetzt die Transaktionslinien minimaler Energie für die Bewegung benachbarter Massen, die auch ihrerseits den Raum zusätzlich deformieren. Raum und Zeit verschmelzen somit zu einer *Raumzeit*, die mathematisch durch eine 4-dim. Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , verbunden mit der sog. LORENTZ-Metrik g , beschrieben wird.

Wir betrachten den einfachsten Fall $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ mit den Koordinaten (t, x, y, z) und der MINKOWSKI-Metrik (\mathcal{M}, g) für den Abstand η :

$$\eta = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad c = \text{Lichtgeschwindigkeit.} \quad (2.1)$$

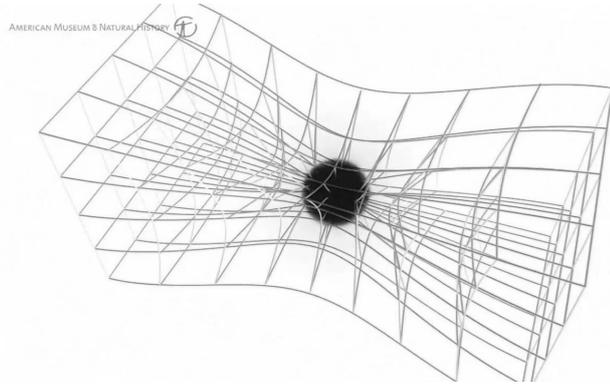
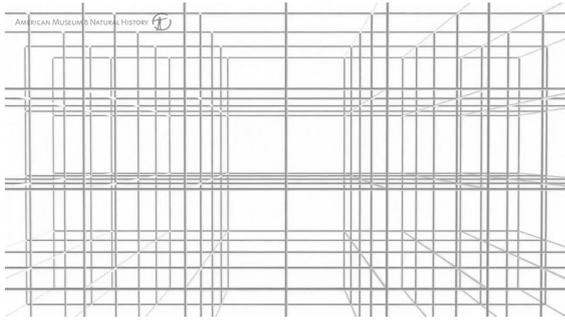


Abbildung 2.1: links: Gitterstruktur eines Raumausschnitts, rechts: Verzerrung des Gitters in der Umgebung einer Masse (symbolisiert durch die dunkle Kreisscheibe, nach [5])

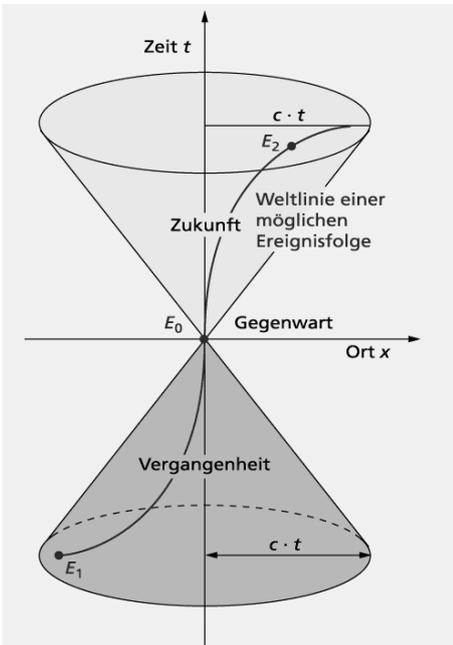
Für das "Abstandsquadrat" von $\overline{P_1 P_2}$ zwischen zwei Punkten gilt in dieser Metrik:

$$\eta(\overline{P_1 P_2}) = -c^2 |t_1 - t_2|^2 + |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$$

Man sieht leicht, dass der Abstand positiv, negativ oder Null sein kann. Wählen wir $P_1 = 0$, so liegen alle Punkte P_2 im Inneren eines *Doppelkegels* (DK).

Mögliche Fälle:

$$\eta(\overline{P_1 P_2}) \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0, \quad \text{falls } P_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_2 \in \text{DK} & (\text{innerhalb des Kegels}) \\ P_2 \in \Gamma_{\text{DK}} & (\text{Rand des Kegels}) \\ P_2 \notin \text{DK} & (\text{außerhalb des Kegels}) \end{cases}$$



Damit ist durch die MINKOWSKI-Metrik mit der Abstanddefinition nach Gleichung (2.1) die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen im Raum-Zeit-Kontinuum in die so bestimmte Abstandsfunktion der Raum-Zeit mit einbezogen worden.

Ist $\eta(\overline{P_1 P_2}) = 0$, dann liegt für $P_1 = 0$ (Ursprung des Koordinatensystems) der Punkt P_2 auf dem Rand des Ereigniskegels; man beachte, dass nur Ereignisse im "Vergangenheitskegel" für einen Beobachter aktuell sichtbar sind.

Die weiteren möglichen Fälle ($\eta(\overline{P_1 P_2}) > 0$) lassen sich ebenfalls analysieren, sind aber für unsere Betrachtungen von untergeordneter Bedeutung.

2.1 Minkowski-Metrik und Lorentz-Transformation

In relativistischer Betrachtungsweise ist die Zeit keine absolute Größe mehr, sondern sie unterliegt einer geschwindigkeitsabhängigen Transformation, der LORENTZ-Transformation. Bewegt sich z.B. ein Beobachter mit einer Geschwindigkeit $v = v_x$ in Richtung der x -Achse, so geht der vierdimen-

sionale Raum-Zeit-Vektor \vec{r} von einem Punkt (t, x, y, z) in einen neuen Punkt (t', x', y', z') über, wobei die Transformation entsprechend der Formelgruppe

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{vx}{c} \right), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (2.2)$$

mit dem LORENTZ-Faktor:
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

erfolgt. Hat man nun eine beliebig gerichtete Geschwindigkeit \vec{v} vorliegen, so wird der Koordinatenvektor $\vec{r} = (t, x, y, z)$ in eine Komponente in Richtung der Geschwindigkeit und eine weitere dazu senkrechte Komponente zerlegt.

Mathematisch betrachtet bildet die LORENTZ-Transformation eine Gruppe; für kleine Geschwindigkeiten $|\vec{v}|$ bzgl. der Lichtgeschwindigkeit c ($|\vec{v}| \ll c$) geht die LORENTZ-Transformation in die (*klassische* oder *nicht-relativistische*) GALILEI-Transformation über.

Definition 1. Eine **Metrik** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist eine skalare Funktion der Punkte $P \in \mathcal{M}$:

$$ds^2(P) := \sum_{i,k}^N g_{ik}(P) \cdot dx^i dx^k \quad \text{mit den folgenden Eigenschaften:} \quad (2.3)$$

- (a) $g_{ik} = g_{ki}$ für alle k, i (**Symmetrie**),
- (b) $ds^2 \geq 0$ für alle Punkte P (**positive Definitheit**),
- (c) Es existiert eine **Inverse** g^{-1} , d.h. für alle Punkte P gibt es Elemente $g^{ik}(P)$, so dass $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$ erfüllt ist (δ_i^k - KRONECKER-Symbol).

Bemerkung. Die N^2 Elemente des Tensors (g_{ik}) nennt man in der ART ($N = 4$) die *Geodäten* der 4-dimensionalen Raumzeit. Sie werden in der ART durch Differentialgleichungen definiert.

2.2 Einsteins Feldgleichungen

EINSTEINS Feldgleichungen geben eine Antwort, welche Metriken g in der Natur möglich sind:

$$\mathbf{Ein} [g] = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T} \quad (2.4)$$

In dieser fundamentalen Gleichung bezeichnen

- G - die Gravitationskonstante und c - die Lichtgeschwindigkeit,
- \mathbf{T} - den **Energie-Impuls-Tensor** der Materie,
(Dieser Operator ist ein Äquivalent zu der Massendichte ρ der POISSON-Gleichung des nicht-relativistischen Modells.)
Die konkrete Gestalt von \mathbf{T} hängt von dem gewählten '*physikalischen Materiemodell*' ab.
- $\mathbf{Ein} [g]$ - ist der EINSTEIN-Tensor, der sich aus den *Krümmungstensoren* (d.h. dem RICCI-Tensor $\mathbf{Ric} [g]$ und der Skalarkrümmung R) zusammensetzt.

Bemerkung. Der Tensor $\mathbf{Ein} [g]$ ist ein Differentialoperator 2. Ordnung, der auf die metrischen Komponenten $g_{\alpha\beta}$ des *Geodäten-Tensors* (g) angewendet wird. Damit entsteht ein gekoppeltes System von 10 nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen nach den vier unabhängigen Variablen (t, x, y, z) , das aus den Komponenten von (g) generiert wird.

Dieses System partieller Differentialgleichungen, das eigentliche System der EINSTEINschen *Feldgleichungen*, ist bei der Betrachtung von Modellen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu lösen, wobei nicht alle Gleichungen betrachtet werden müssen. Vier Differentialgleichungen, die sog. BIANCCI-Identitäten, sind automatisch erfüllt, wenn der verbleibende "Rest" gelöst wird. Durch vereinfachende und idealisierende Annahmen wurden in der Vergangenheit zahlreiche Sonderfälle untersucht und mit analytischen oder numerischen Methoden Lösungen gefunden.

Noch im Jahr der Veröffentlichung der Grundzüge der ART im Jahre 1915/1916 durch ALBERT EINSTEIN wurde von dem Physiker KARL SCHWARZSCHILD eine analytische Lösung eines stark idealisierten Sonderfalls veröffentlicht. Den Grundgedanken dieser Lösung wollen wir uns noch kurz zuwenden.

2.3 Spezialfall: Die Schwarzschild-Geometrie

Im Teil 1 dieses Beitrages wurde die Potentialgleichung als grundlegende Beziehung der NEWTONschen Gravitationstheorie betrachtet. In Analogie dazu gibt es in der relativistischen Betrachtungsweise im Vakuum (, d.h. unter der Bedingung, dass der Materie-Tensor \mathbf{T} verschwindet,) **nicht-triviale** Lösungen der EINSTEIN-Gleichungen, die in einer **nicht-flachen** Metrik des 4-dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums entsprechend der MINKOWSKI-Metrik (2.1) beschrieben werden. In Verbindung mit weiteren, noch zu ergänzenden Idealisierungen spricht man in diesem Zusammenhang von der Lösung der EINSTEIN-Gleichungen in der SCHWARZSCHILD-Metrik.

Annahmen:

- **Koordinatensystem:** Wir betrachten ein lokales Polarkoordinatensystem: $(t, x, y, z) \Rightarrow (t, r, \theta, \phi)$
- **Koordinatentransformation** (Kugelsymmetrie):

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

- **Abstandsfunktion:** $ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$

Die *vierdimensionale Raum-Zeit-Geometrie* schreibt sich dann in folgender Form, wobei in der Literatur die sog. *Summenkonvention* verwendet wird (, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird stets summiert, ohne die Summationszeichen explizit aufzuführen):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta := \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

mit dem MINKOWSKI-Metrik-Tensor

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} -f(r)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Bemerkung. zu den Funktionen $f(r)$, $g(r)$:

- f, g – sind unbekannte, noch zu bestimmende Funktionen; abhängig nur von der radialen Komponente r , sie sind *statisch* (d.h. nicht explizit von der Zeit t abhängig),
- die Berechnung erfolgt durch Einsetzen der Metrik in Gl. (2.4): (EINSTEIN-Tensor \rightarrow CHRISTOFFEL-Symbole \rightarrow Komponenten des RICCI-Tensors)

Weitere Voraussetzungen:

- Statische, sphärische, begrenzte Masseverteilung innerhalb einer Kugel vom Radius r_0 :

$$\rho(r) \begin{cases} \neq 0, & r \leq r_0, \\ = 0, & r > r_0. \end{cases}$$

- Als Ansatz für den *Tensor der Geodätischen* dient eine Diagonalmatrix:

$$(g_{\alpha\beta}) = \text{diag} \left(-c^2 f(r), g(r), r^2, r^2 \sin^2(\theta) \right), \quad f, g - \text{ bel. Funktion}$$

- Der RICCI-Tensor definiert sich über CHRISTOFFEL-Symbole:

Definition 2.
$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} \Gamma_{\nu\mu}^{\mu}$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ – CHRISTOFFEL-Symbole

- Außerhalb der Massenverteilung ($r \geq r_0$) gilt: $\boxed{\forall \alpha, \beta : R_{\alpha\beta} = 0}$.

Wird eine Zwischenrechnung ausgeführt und werden die CHRISTOFFEL-Symbole entsprechend ihrer Definition ausgewertet, verbleibt unter den vereinfachenden Annahmen die Lösung zweier Differentialgleichungen, die nur vom Radius r abhängen. Aus

$$\frac{R_{00}}{-c^2 f(r)} + \frac{R_{11}}{g(r)} = -\frac{1}{c^2 f(r) g(r)} \left(\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{g'(r)}{g(r)} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

folgt

$$\frac{d}{dr} \ln (c^2 f(r) g(r)) = 0 \quad \text{oder} \quad c^2 f(r) g(r) = \text{const.}$$

Weil die Metrik für $r \rightarrow \infty$ flach ist, folgt weiter

$$c^2 f(r) \xrightarrow{(r \rightarrow \infty)} 1, \quad g(r) \xrightarrow{(r \rightarrow \infty)} 1, \quad \text{d.h. es gilt } c^2 f(r) g(r) = 1.$$

Auf ähnliche Art erhält man aus den Definitionen für R_{11} und R_{22} eine DGL. für $f(r)$, die sich aber leicht lösen lässt.

Weitere Umformungen führen auf eine gewöhnliche DGL. und weitere Bedingungsgleichungen:

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0, \quad c^2 f(r) \cdot g(r) = 1 \quad \Rightarrow \quad c^2 f(r) = \frac{1}{g(r)} = a - \frac{2b}{r},$$

hier sind a, b zunächst beliebige Konstanten

$f(r)$ ist die gesuchte Potenzialfunktion. Anpassung der Anfangsbedingungen liefert in **lokalen polaren Koordinaten** das Potenzial $V(r) = 1 - \frac{2Gm}{r}$ und die SCHWARZSCHILD-Metrik:

$$\boxed{\mathbf{g}_{\mathcal{M}} = -V(r) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).} \quad (2.5)$$

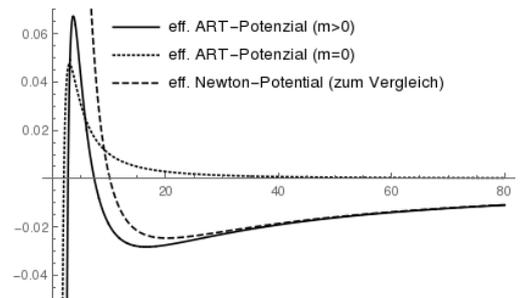
2.4 Resultate und Auswertung

- Die angegebene Lösung wurde 1916 von dem Physiker (Astronomen) KARL SCHWARZSCHILD (geb. 1873) gefunden, vgl. [4].
- Die Lösung gilt für die Beschreibung des Gravitationsfeldes im Vakuum außerhalb eines sphärisch-symmetrischen Sterns der Masse m .
- Die Metrik (2.5) konvergiert für $r \rightarrow \infty$ gegen die flache Metrik.
- Die Lösungsfamilie (2.5) ist eindeutig bestimmt.
- Für $r \rightarrow r_S = 2mG/c^2$ werden Komponenten von (2.5) *singulär*; d.h. innerhalb des *Sternenradius* existiert die Lösung nicht; dort gilt aber ohnehin $\mathbf{T} \neq 0$.

Das **effektive Potenzial** V_{eff} ergibt sich als Funktion des Abstandes r eines massiven Körpers im Zusammenspiel zwischen

- dem NEWTONschen Gravitationspotenzial,
- dem Zentrifugalkraft-Term (proportional zu $+\ell^2/r^2$) und
- einem relativistischen Term (proportional zu $-1/r^3$).

$$V_{\text{eff}} = \begin{cases} -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2r^3}, & (m \neq 0) \\ \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2r^3}, & (m = 0) \end{cases} \quad (2.6)$$



Die Grafik zeigt das Verhalten der Funktion $V_{\text{eff}}(r)$ der relativistischen Betrachtung für $m \neq 0$ und für Ruhmasseteilchen mit $m = 0$ im Vergleich mit dem effektiven NEWTON-Potenzial. Das Formelzeichen M bezeichnet die Masse des sphärischen Körpers (z.B. der Sonne), m ist die dem Einfluss dieses Potentials unterliegende Masse (z.B. ein Planet), die den *Drehimpuls* $\vec{\ell}$ besitzt. Der Fall $m = 0$ ist für *Teilchen mit der Ruhmasse null* (z.B. Photonen) von Bedeutung und zeigt eine vollständig andere Charakteristik.

Mit Hilfe der angegebenen Theorie gelang es sowohl die Periheldrehung des Planeten Merkur als auch die Ablenkung von Sternenlicht während der Sonnenfinsternis 1919 theoretisch zu begründen und durch Beobachtung praktisch zu verifizieren.

Literatur

- [1] Torsten Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer Spektrum, 7. Auflage, 2016
- [2] James B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. University of California, Pearson, 2003
- [3] Gareth P. Alexander, *General Relativity*. University of Warwick, Lecture Notes, 2016/2017
- [4] Karl Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*. Reimer, Berlin 1916, S. 189 ff. (Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften)
- [5] https://de.wikipedia.org/wiki/American_Museum_of_Natural_History