

# Trajektorien um nicht- kugelsymmetrische Masseverteilungen

Wie verändern sich die bekannten Kepler-Ellipsen,  
wenn sich zusätzlich zu einer zentralen  
Punktmasse weitere Massen im System befinden?

Ausgangspunkt dieser Frage:

Wundern über die Perihel-Drehung

## Didaktisches Ziel des Vortrags:

NICHT beweisen,

DASS man die Merkur-Bahn selber näherungsweise  
BERECHNEN kann (hat Michael Fröhner schon getan),

SONDERN zeigen,

WIE man allgemeine Abweichungen von den Kepler-Ellipsen  
einfach in EXCEL modellieren und durch Experimentieren  
VERSTEHEN (also in sein WELTBILD einbauen) kann.

(Gegensatz: Man nimmt nur zur Kenntnis und „glaubt“ also.)

# Einzelne Schritte des Vorgehens:

1) Grundsätzliche Überlegungen zu Physik und Geometrie der Trajektorien

2) Theorie:

Differenzgleichungen aus Newtonschen Ansätzen aufstellen. (siehe Michael)  
(Zentralkörper soll groß gegen den Rest sein und im Ursprung fest stehen, der „Rest“ soll wählbar sein: 1 diskreter Zusatz-Planet und/oder 1 Zusatz-Ring)

3) „excelperimentelle Praxis“:

Zuerst **Stamm-Daten** eingeben: Zentralmasse, Spielmassen, Konstanten  
Dann **Anfangsdaten** eingeben: Start-Orte und Start-Geschwindigkeiten  
Dann **Numerik-Schrittweite** (hier: Zeitschritt) festlegen.

4) Dann alle für die Berechnung eines Zeitschritts erforderlichen Formeln nach 2) in die EXCEL-Tabelle eintragen.

5) Dann neugierig sein und einfach spielen (es kann nichts „kaputt“ gehen!!)

## 6) ausgewählte Ergebnisse des Spielens

# 1) Grundsätzliche Überlegungen zu Physik und Geometrie der Trajektorien

System ohne äußere Kräfte: als System geradlinig gleichförmig: Newton:

$$\Sigma (m_i * \underline{d}v_i/dt) = 0 \quad (\text{Impuls-Erhaltung})$$

-> **2-Körper-Problem im Schwerpunkt-System:**

$$m_1 * \underline{v}_1 = - m_2 * \underline{v}_2 \quad (\text{Impuls-Erhaltung})$$

$$m_1 * \underline{r}_1 = - m_2 * \underline{r}_2 \quad (\text{Schwerpunkt-Erhaltung})$$

Daraus folgt, dass **erstens** beide Bahnen füreinander **Zentralprojektionen** im Maßstab  $m_1/m_2$  sind.

Die Drehimpuls-Erhaltung führt **zweitens** dazu, dass auch der Flächensatz zusammen UND einzeln gilt, da alle beteiligten Kraftwirkungs-Linien (das ist nur eine **einzige**, gepaart mit ihrer Gegenkraft) durch den Schwerpunkt verlaufen und also **kein Drehmoment** ausüben können (Sonderfall!). Somit sind die Bahnen gemäß der Brennpunkteigenschaft der **Ellipse** im 2-K-Problem genau solche.

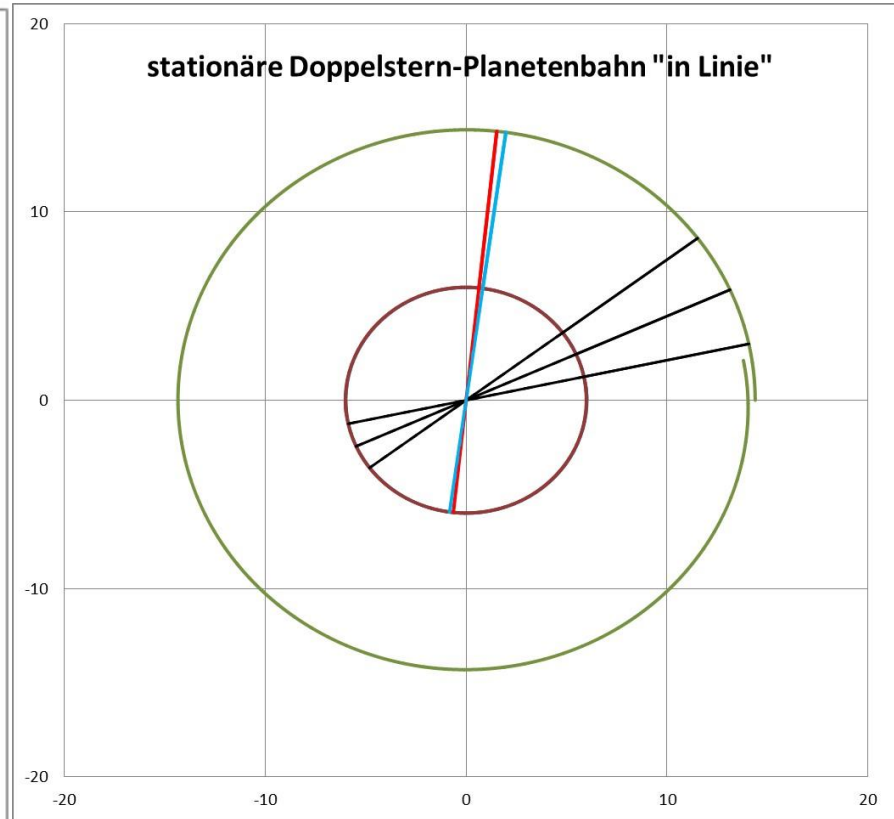
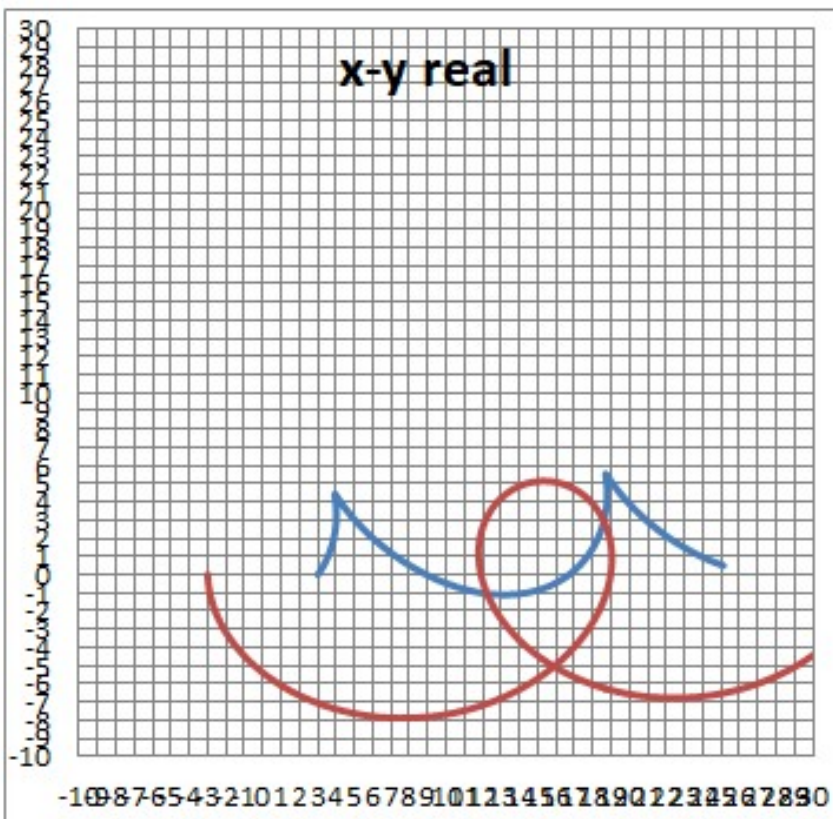
JEDER nicht vernachlässigbare **dritte** Körper „zerstört“ also die Ellipse, weil die **Wirkungslinien der Kräfte NICHT mehr durch den Schwerpunkt** verlaufen und dieser nicht mehr Brennpunkt sein kann.

In Polarkoordinaten sind dann bei  $n > 2$  die jeweiligen beiden Schwingungen (radial und azimuthal) entkoppelt und bilden Rosetten.

# 1) Grundsätzliche Überlegungen zu Physik und Geometrie der Trajektorien: Spannweite der möglichen Fälle

System-Ursprung NICHT im Schwerpunkt:

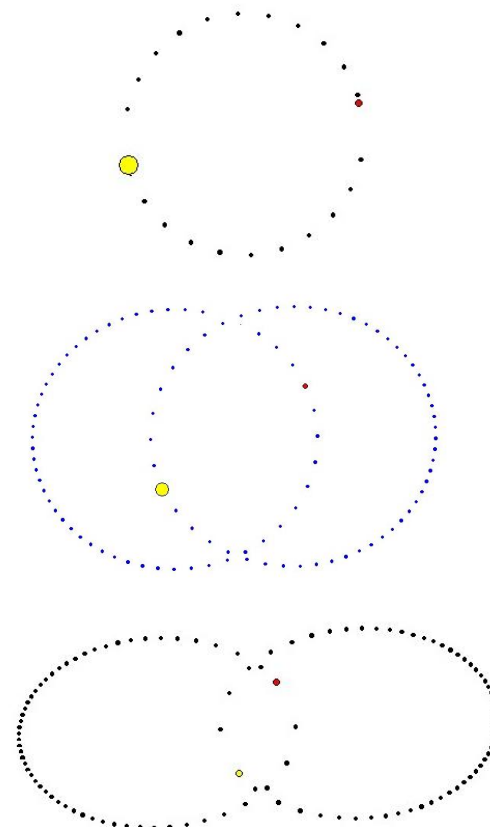
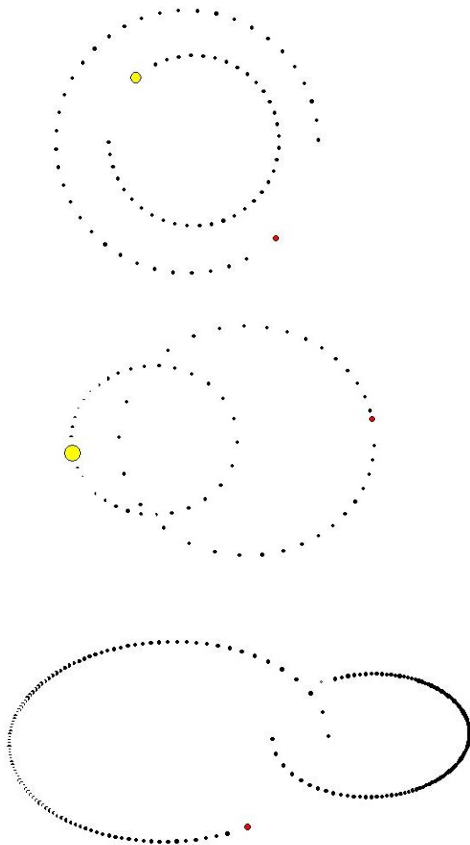
synchroner Planet um  
symmetrischen Doppelstern:



# 1) Grundsätzliche Überlegungen zu Physik und Geometrie der 2-Körper-Trajektorien: Spannweite der „normalen Fälle“

Doppelstern ungleicher Massen

Doppelstern gleicher Massen



## 2) Einzelne Schritte des Vorgehens in der kartesischen x-y-Ebene :

Differenzgleichungen aus Newtonschen Ansätzen aufstellen

(Zentralkörper soll groß gegen den Rest sein und im Ursprung fest stehen)

### **Beschleunigungen Merkur zum Zeitpunkt i:**

$$a_{mx}(i) = \Sigma F_x / m_m = (F_x(\text{Merkur-Sonne}) + F_x(\text{Merkur-Venus}) + F_x(\text{Merkur-Ring})) / m_m$$

$$a_{my}(i) = \Sigma F_y / m_m = (F_y(\text{Merkur-Sonne}) + F_y(\text{Merkur-Venus}) + F_y(\text{Merkur-Ring})) / m_m$$

### **Beschleunigungen Venus zum Zeitpunkt i**

$$a_{vx}(i) = \Sigma F_x / m_v = (F_x(\text{Venus-Sonne}) + F_x(\text{Venus-Merkur})) / m_v$$

$$a_{vy}(i) = \Sigma F_y / m_v = (F_y(\text{Venus-Sonne}) + F_y(\text{Venus-Merkur})) / m_v$$

(Die WW Venus-Ring wird didaktisch weggelassen...)

(Der Kreis-Ring kann aus diskreten Massen gebildet werden, z.B. 12 äquidistante)

**Für alle Kräfte wird das Newtonsche Gravitationsgesetz gewählt.**

$$F_{xjk} = -G * m_k * m_j * x_{jk} / r_{jk}^3 \quad (j,k: \text{diskrete Massen Sonne, Merkur, Venus, Ring})$$

$$F_{yjk} = -G * m_k * m_j * y_{jk} / r_{jk}^3$$

### **Daten für nächsten Zeitpunkt berechnen:**

$$v_{nx}(i+1) = v_{nx}(i) + a_{nx}(i) * dt$$

$$v_{ny}(i+1) = v_{ny}(i) + a_{ny}(i) * dt$$

$$x_n(i+1) = x_n(i) + v_{nx}(i) * dt \quad (\text{oder: } x_n(i+1) = x_n(i) + v_{nx}(i+1) * dt \quad \text{oder: gemittelt})$$

$$y_n(i+1) = y_n(i) + v_{ny}(i) * dt \quad (\text{dto.})$$

## 2a) Einzelne Schritte des Vorgehens in EXCEL:

- a) absolute und relative Adressierung bei Formel-Eingabe beachten!
- b) Zwischenrechnungen möglichst als Spalten anlegen (Fehler-Suche!)
- c) Kommentare irgendwo festhalten (Fehler-Suche!)
- d) freie und abgeleitete Variable (Anfangsbedingungen) farblich kennzeichnen (Fehler-Quelle!)



### 3) Grundsätzliche Festlegungen des Vorgehens:

Zentralmasse fest im Ursprung?

ja: Start-Werte der Planeten beliebig

nein: Ein Satz ( $\underline{r}$  und  $\underline{v}$ ) ergibt sich mit der Impulserhaltung aus den anderen Sätzen, wenn der Schwerpunkt des Systems im Ursprung liegen soll

Zeit-Schrittweite fest?

ja: In jeder EXCEL-Zeile gleich (Gefahr großer „Artefakte“)

nein: Aus Geschwindigkeit oder Kraft zeilenweise ableiten

Plausibilitätsproben mitlaufen lassen (um „Artefakte“ zu erfassen)?

ja: z.B. Drehimpulse oder Energien ständig mitrechnen lassen

nein: (keine Aktivitäten)

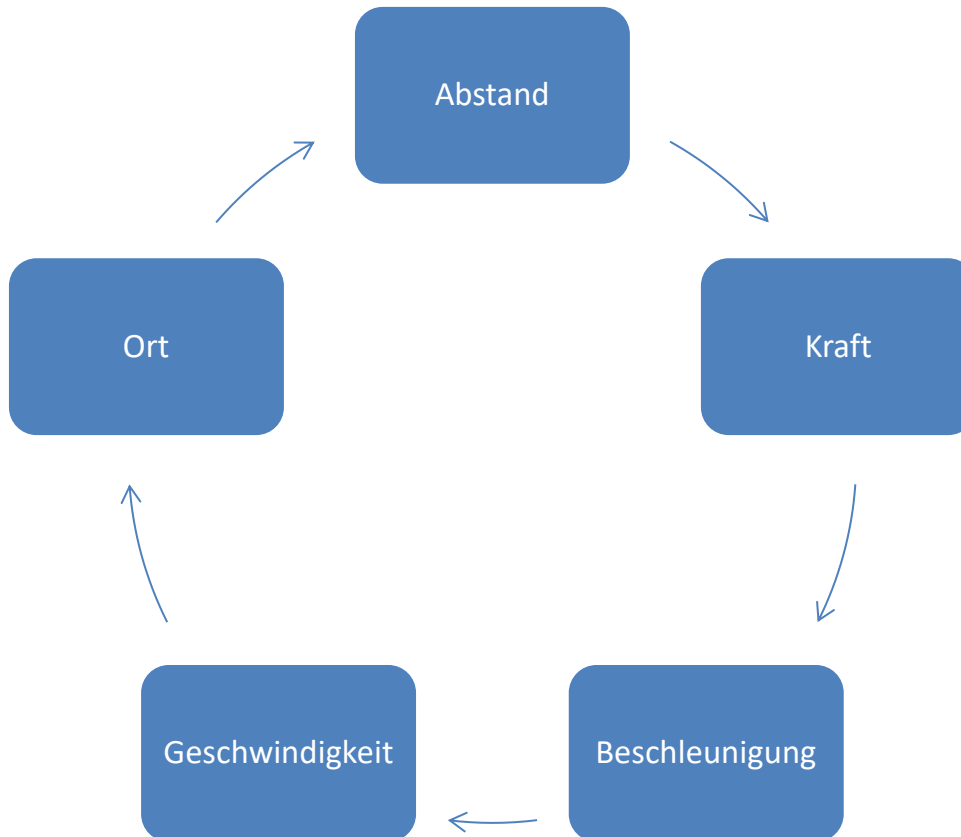
Diagramm-Achsen „fest“ einstellen?

ja: Nachteil für freie Wahl der Start-Parameter

nein: Nachteil der ungleichen automatischen Verzerrung

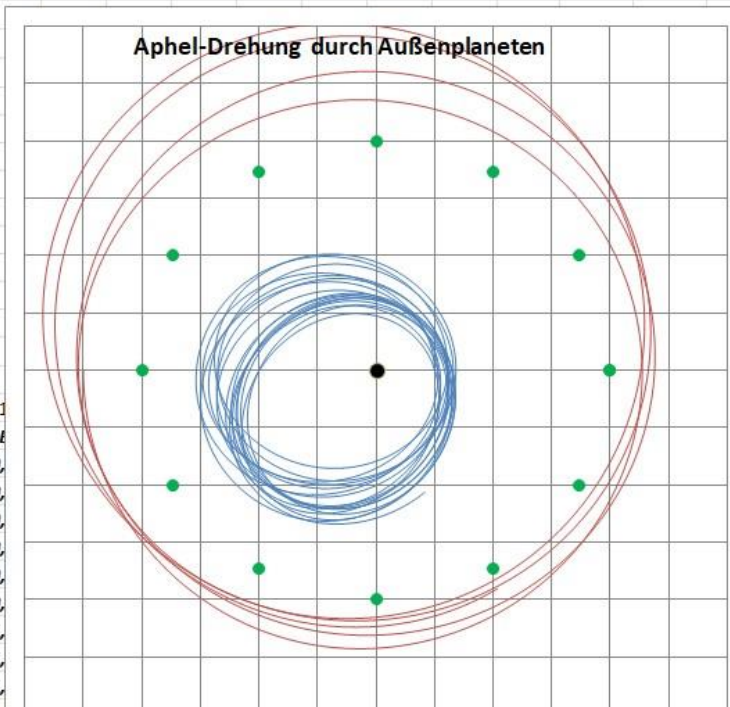
## 4) Diese Schleife wird immer wieder durchlaufen...

(am einfachsten durch Formeln in einer ersten EXCEL-Zeile, die dann zur EXCEL-Tabelle kopiert werden; etwas eleganter durch ein EXCEL-VBA-Programm im Hintergrund; noch eleganter durch ein „bewegtes“ Modell in einer EXCEL-unabhängigen Sprache (auch in EXCEL ist ein „Timer“ möglich, aber umständlich))



# 5) allgemeines Vorgehen in der x-y-Ebene

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	
1	<b>Klassische Periheldrehung durch Dritten</b>							Ring			MP												
2	G	0,001	"innen"		Probe:		x	y		0	0												
3	M	1000	oder		a1	1,7	0	4	0														
4	Exponent	-2,00	"außen"	"RING"	a2	5	1	3,4641	2														
5		P1	P2	P3/12 fest	w1/w2:	5,0	2	2	3,4641														
6	Start-x	1,00	-5,00	4,0000			3	2E-16	4														
7	Start-y	0,00	0,00	4,0000			4	-2	3,4641														
8	Start-vx	0,00	0,00	0,0000			5	-3,464	2														
9	Start-vy	1,220	-0,450	0,0000			6	-4	5E-16														
10	m	20,000	50,000	0,1000			7	-3,464	-2														
11	Zeittakt	0,006					8	-2	-3,464														
12							9	-7E-16	-4														
13							10	2	-3,464														
14							11	3,4641	-2														
15							12	4	-1E-15														
16	t																						
17		x1	y1	vx1	vy1	r1	F1	phi1	Fx1	Fy1												Fy12	
18	0,006	1,00	0,00	0,00	1,22	1	-20	0	-20	-8E-05												0	
19	0,012	1	0,00732	-0,0060083	1,22	1	-20	0,007	-20	-0,0001												5E-05	
20	0,018	0,9999	0,01464	-0,0120166	1,22	1	-20	0,015	-20	-0,0002												9E-05	
21	0,024	0,9998	0,02196	-0,0180243	1,2199	1	-20	0,022	-19,99	-0,0003												0,0001	
22	0,030	0,9996	0,02928	-0,0240309	1,2197	1	-20	0,029	-19,99	-0,0004												0,0002	
23	0,036	0,9995	0,03659	-0,0300358	1,2196	1	-19,99	0,037	-19,98	-0,0005												0,0002	
24	0,042	0,9992	0,04391	-0,0360386	1,2193	1	-19,99	0,044	-19,97	-0,0006												0,0003	
25	0,048	0,999	0,05123	-0,0420387	1,2191	1	-19,99	0,051	-19,96	-0,0007												0,0003	
26	0,054	0,9987	0,05854	-0,0480355	1,2188	1	-19,98	0,059	-19,95	-0,0008												0,0004	
27	0,060	0,9984	0,06585	-0,0540285	1,2184	1,001	-19,98	0,066	-19,93	-0,0009												0,0004	
28	0,066	0,998	0,07316	-0,0600173	1,218	1,001	-19,97	0,073	-19,92	-0,0010												0,0005	
29	0,072	0,9976	0,08046	-0,0660013	1,2176	1,001	-19,97	0,08	-19,9	-1,605	-5	-0,03	0,0027	-0,45	5,00	-2	-3,136	2	0,0119	5,9986	0,0278	0,0005	
30	0,078	0,9972	0,08776	-0,0719799	1,2171	1,001	-19,96	0,088	-19,88	-1,75	-5	-0,032	0,0029	-0,45	5,00	-2	-3,135	2	0,013	5,9983	0,0278	0,0006	
31	0,084	0,9967	0,09506	-0,0779526	1,2166	1,001	-19,95	0,095	-19,86	-1,894	-5	-0,035	0,0032	-0,45	5,00	-2	-3,135	2	0,014	5,998	0,0278	0,0006	
32	0,090	0,9962	0,10236	-0,083919	1,216	1,001	-19,94	0,102	-19,84	-2,038	-5	-0,038	0,0034	-0,45	5,00	-2	-3,134	2	0,0151	5,9977	0,0278	0,0006	
33	0,096	0,9957	0,10965	-0,0898785	1,2154	1,002	-19,93	0,11	-19,81	-2,182	-5	-0,04	0,0036	-0,45	5,00	-2	-3,133	2	0,0162	5,9974	0,0278	0,0007	
34	0,102	0,9951	0,11694	-0,0958305	1,2147	1,002	-19,92	0,117	-19,79	-2,325	-5	-0,043	0,0039	-0,45	5,00	-2	-3,133	2	0,0173	5,9971	0,0278	0,0007	
35	0,108	0,9945	0,12423	-0,1017746	1,214	1,002	-19,91	0,124	-19,76	-2,468	-5	-0,046	0,0041	-0,45	5,00	-2	-3,132	2	0,0184	5,9967	0,0278	0,0008	
36	0,114	0,9938	0,13151	-0,1077103	1,2133	1,003	-19,9	0,132	-19,73	-2,61	-5	-0,049	0,0044	-0,45	5,00	-2	-3,132	2	0,0194	5,9963	0,0278	0,0008	



## 5) allgemeines Vorgehen in der x-y-Ebene

Die Formeln in den EXCEL-Zellen können u.U. sehr lang werden, wenn man zum Beispiel die zwölf Ringmassen-Punkte einzeln auswertet (hier liegt z.B. einer der Gründe, warum man mit einer Schleife über alle variabel einstellbaren diskreten Punkte in VBA besser fährt).

**Formel in Zelle <I19> für die x-Komponente der Kraft (Fx1) aus Zentrum und Ringpunkten:**

$$\begin{aligned} &=G19*\text{COS}(H19)+(\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(0/6*PI()-B19)/((B19-(\$D\$6*\text{COS}(0/6*PI()))^2+(C19- \\ &(\$D\$6*\text{SIN}(0/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(1/6*PI()-B19)/((B19- \\ &(\$D\$6*\text{COS}(1/6*PI()))^2+(C19-(\$D\$6*\text{SIN}(1/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(2/6*PI()- \\ &B19)/((B19-(\$D\$6*\text{COS}(2/6*PI()))^2+(C19- \\ &(\$D\$6*\text{SIN}(2/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(3/6*PI()-B19)/((B19- \\ &(\$D\$6*\text{COS}(3/6*PI()))^2+(C19-(\$D\$6*\text{SIN}(3/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(4/6*PI()- \\ &B19)/((B19-(\$D\$6*\text{COS}(4/6*PI()))^2+(C19- \\ &(\$D\$6*\text{SIN}(4/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(5/6*PI()-B19)/((B19- \\ &(\$D\$6*\text{COS}(5/6*PI()))^2+(C19-(\$D\$6*\text{SIN}(5/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(6/6*PI()- \\ &B19)/((B19-(\$D\$6*\text{COS}(6/6*PI()))^2+(C19- \\ &(\$D\$6*\text{SIN}(6/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(7/6*PI()-B19)/((B19- \\ &(\$D\$6*\text{COS}(7/6*PI()))^2+(C19-(\$D\$6*\text{SIN}(7/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(8/6*PI()- \\ &B19)/((B19-(\$D\$6*\text{COS}(8/6*PI()))^2+(C19- \\ &(\$D\$6*\text{SIN}(8/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(9/6*PI()-B19)/((B19- \\ &(\$D\$6*\text{COS}(9/6*PI()))^2+(C19-(\$D\$6*\text{SIN}(9/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(10/6*PI()- \\ &B19)/((B19-(\$D\$6*\text{COS}(10/6*PI()))^2+(C19- \\ &(\$D\$6*\text{SIN}(10/6*PI()))^2)^{3/2}+\$B\$2*\$D\$10/12*(\$D\$6*\text{COS}(11/6*PI()-B19)/((B19- \\ &(\$D\$6*\text{COS}(11/6*PI()))^2+(C19-(\$D\$6*\text{SIN}(11/6*PI()))^2)^{3/2})*\$B\$10 \end{aligned}$$

## 6) spezielle Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (1a):

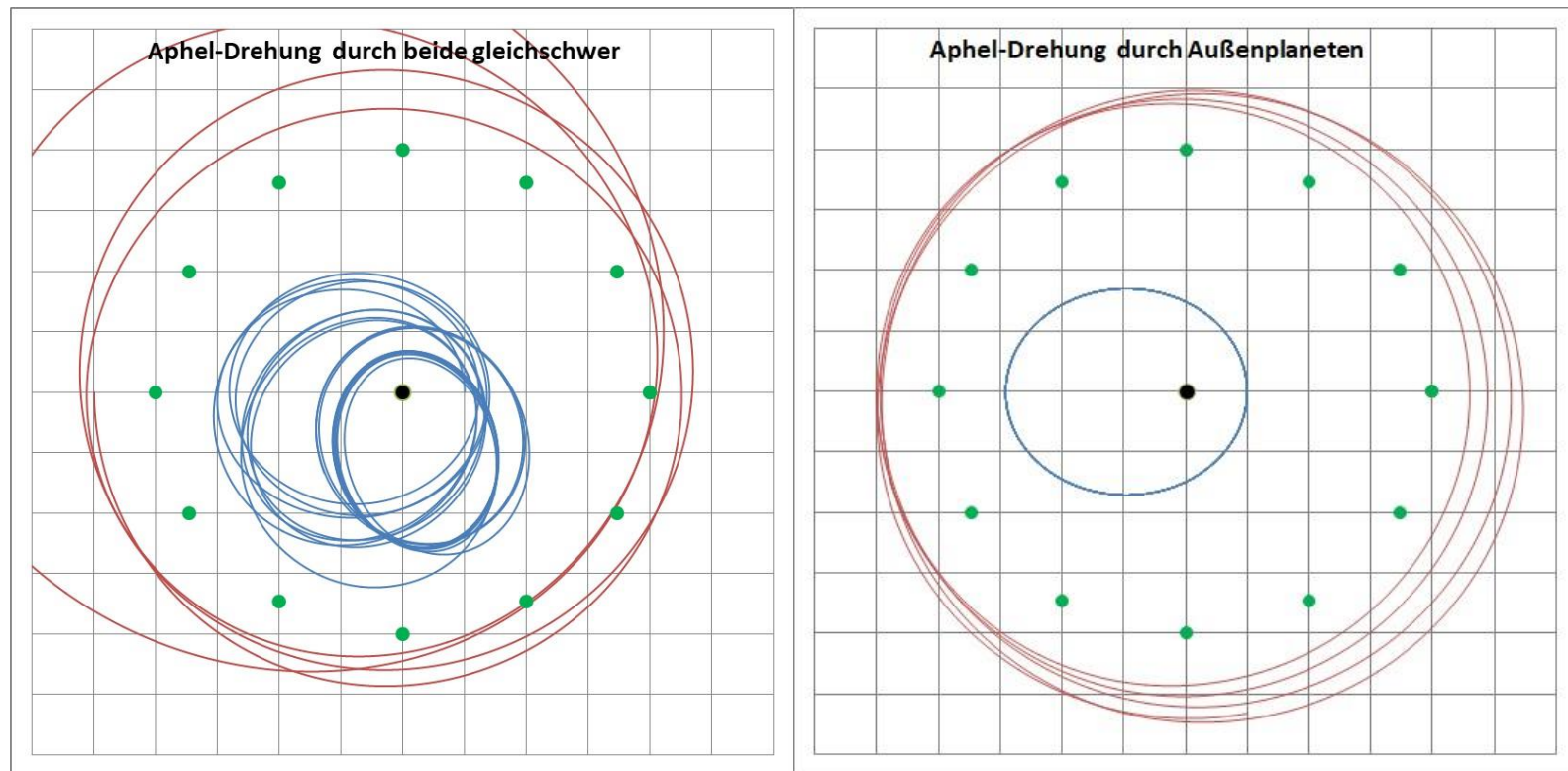
(rot-grün ohne WW, Zentrum fest, Ring AUSSEN vom inneren Planeten)

links: Ring und Außenplanet gleich

rot/grün/blau/Zent = 5/5/2/100

rechts: fast ohne Ring und Außenplanet

0,01/0,01/2/100 (*Numerik-Probe!!*)



## 6) spezielle Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (1b):

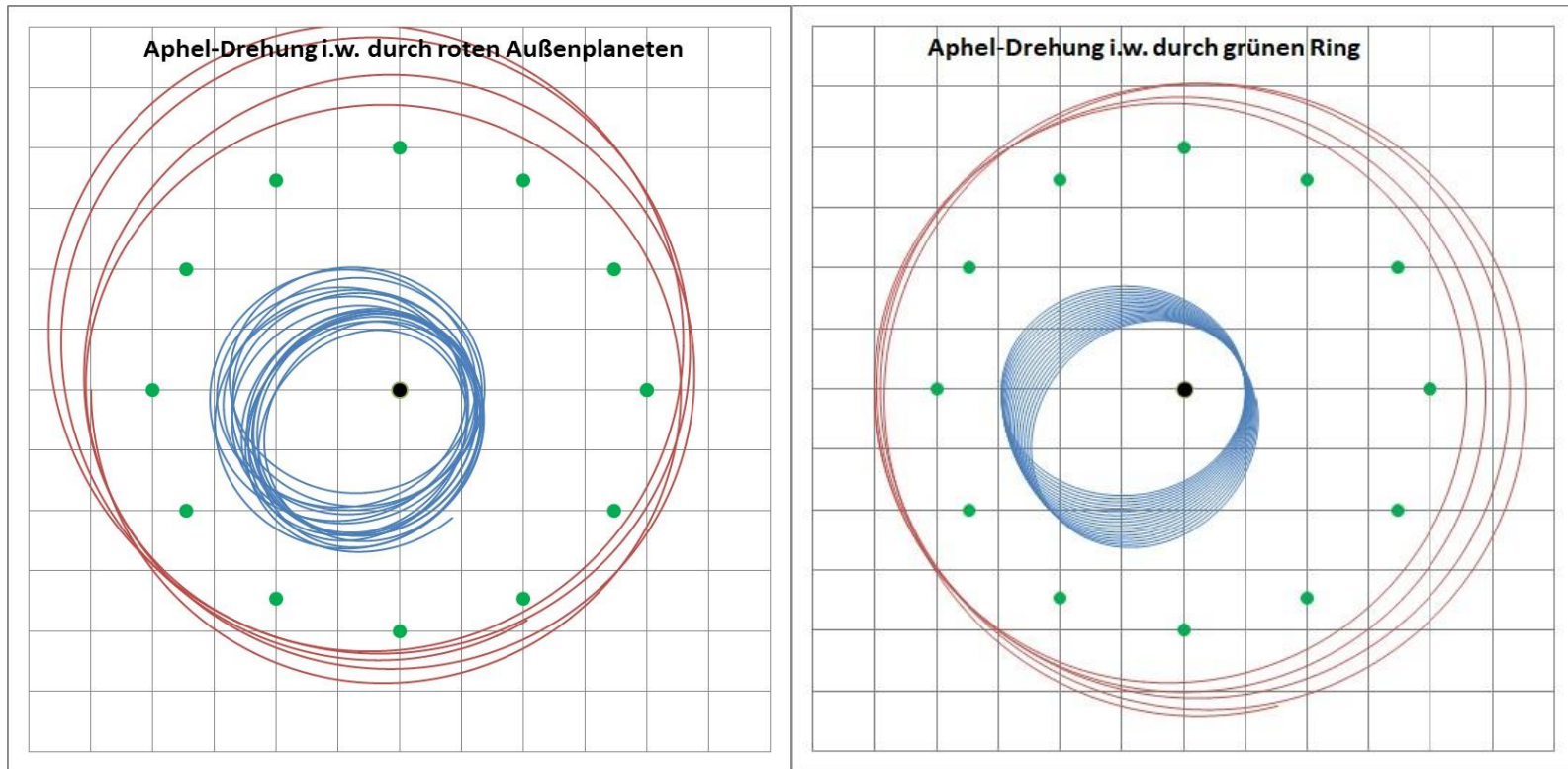
(rot-grün ohne WW, Zentrum fest, Ring AUSSEN vom inneren Planeten)

links: Ring relativ leicht

rot/blau/Zent = 5/2/100

rechts: Ring relativ schwer

grün/blau/Zent=5/2/100



## 6) spezielle Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (1c):

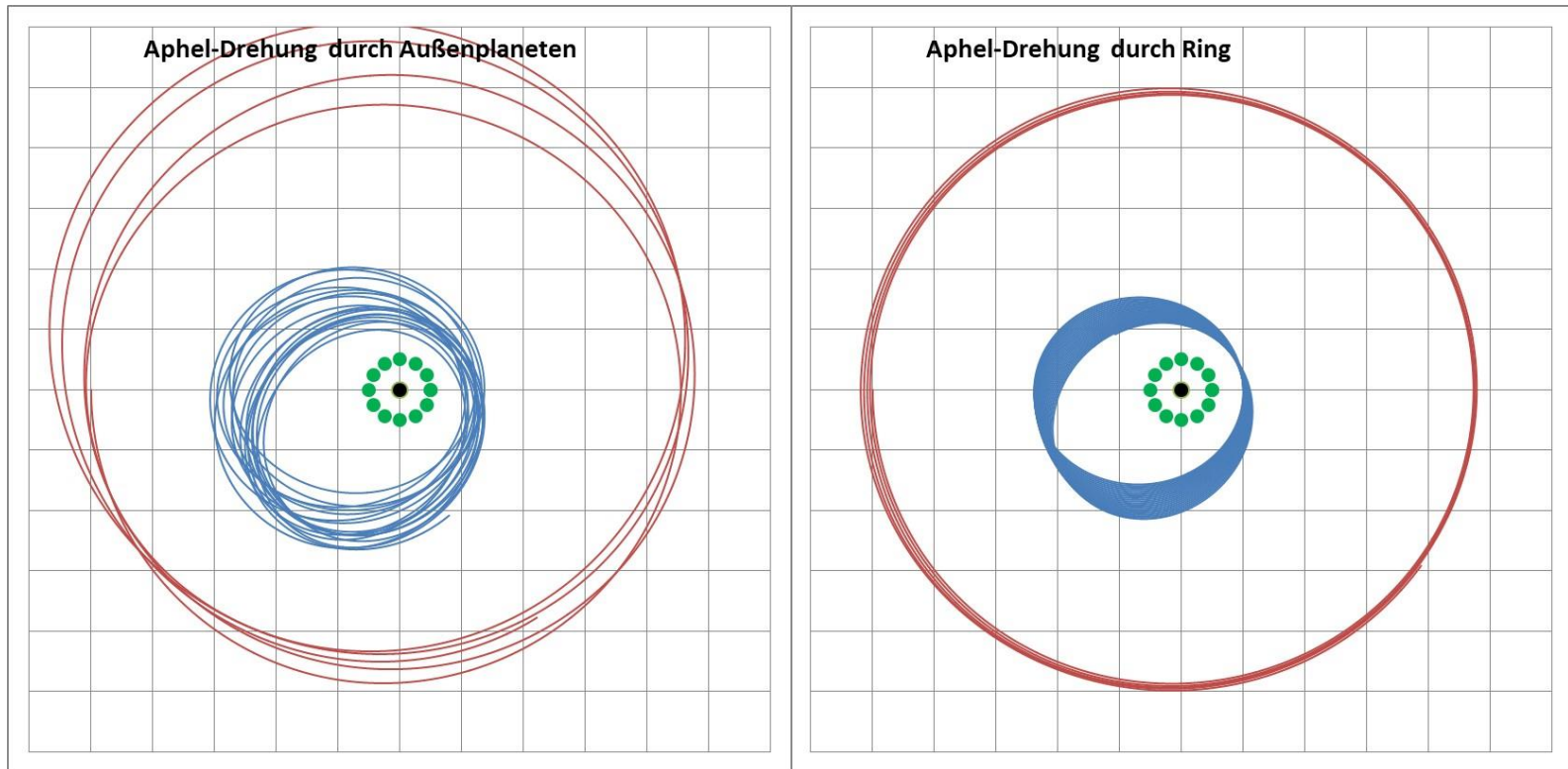
(rot-grün ohne WW, Zentrum fest, Ring INNEN)

links: Ring relativ leicht

rot/blau/Zent = 5/2/100

rechts: Ring relativ schwer

grün/blau/Zent=5/2/100



## 6) spezielle Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (1d):

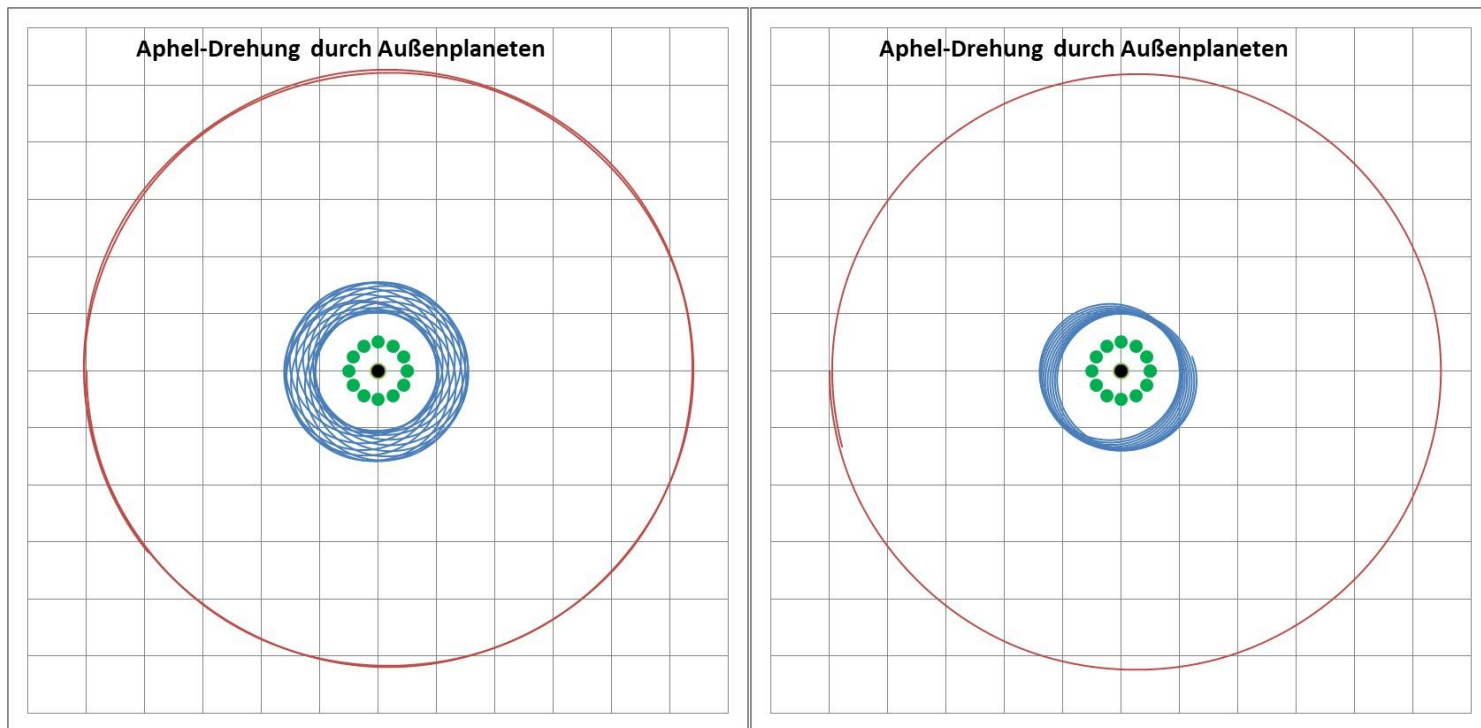
(rot-grün ohne WW, Zentrum fest, Ring INNEN)

links: Ring relativ leicht

rot/blau/Zent = 5/2/25

rechts: Ring relativ schwer

grün/blau/Zent=5/2/25





## 6) spezielle Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (1e):

(rot-grün ohne WW, Zentrum fest, Ring INNEN)

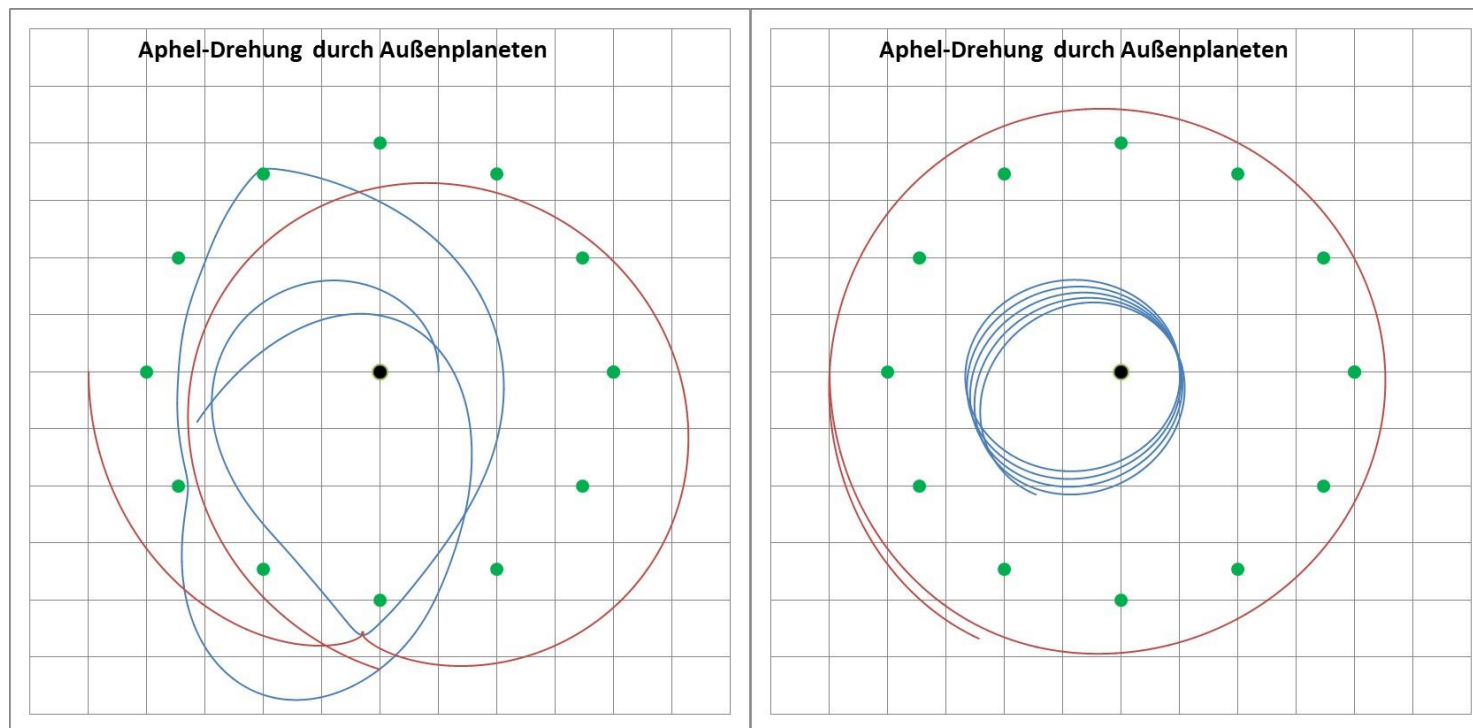
links: Ring relativ leicht

rot/grün/blau/Zent = 5/5/2/25

rechts: Ring relativ schwer

grün/blau/Zent=5/2/25

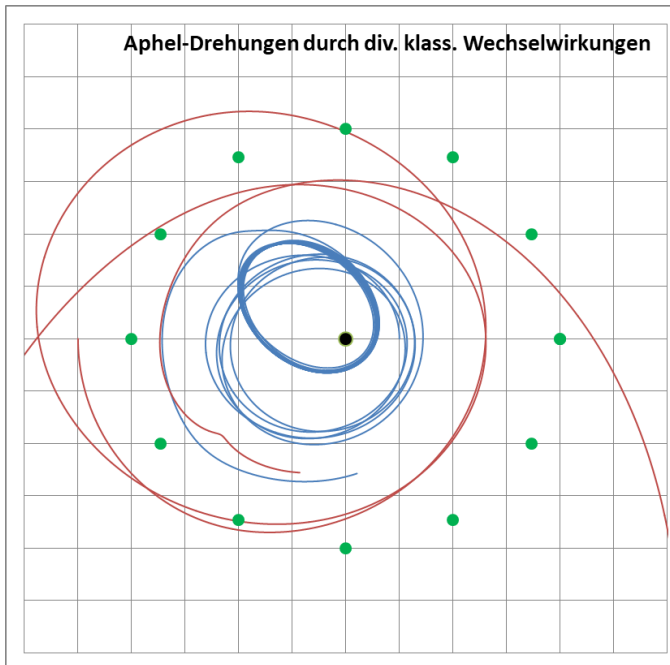
**CHAOS**



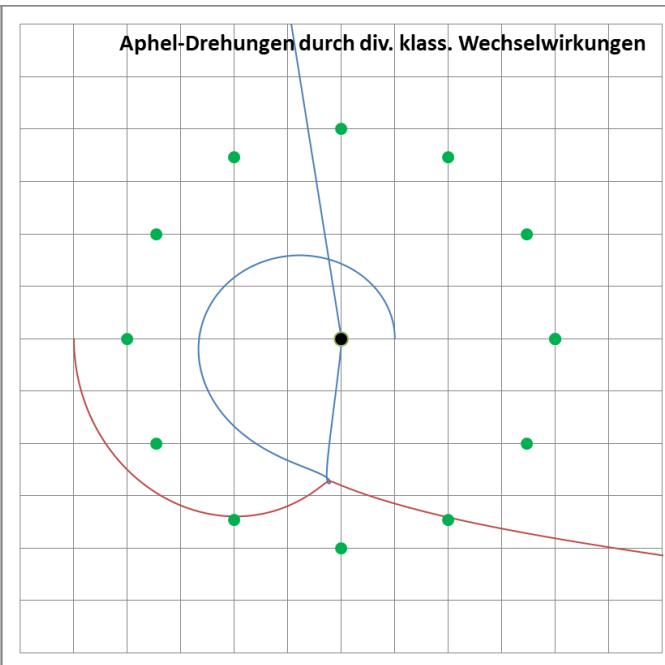
## 6) spezielle Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (2):

unglücklich gewählte Start-Parameter und: alle drei Massen gleich

je 5 % der Zentralmasse



je 10% der Zentralmasse



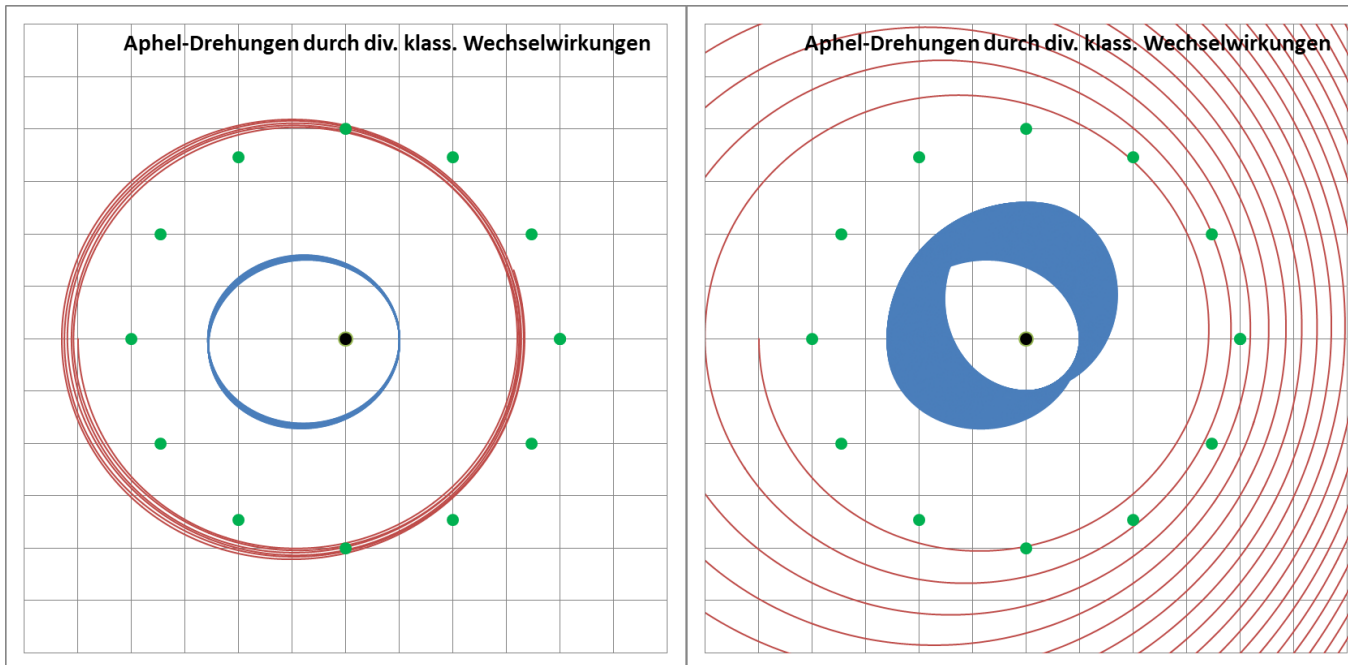
## 6) spezielle Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (3):

unglücklich gewählte Parameter: Zeittakt zu hoch

richtig

zu hoch

energetisch unsinnige Spirale



## 6) Zusammenfassung der Ergebnisse:

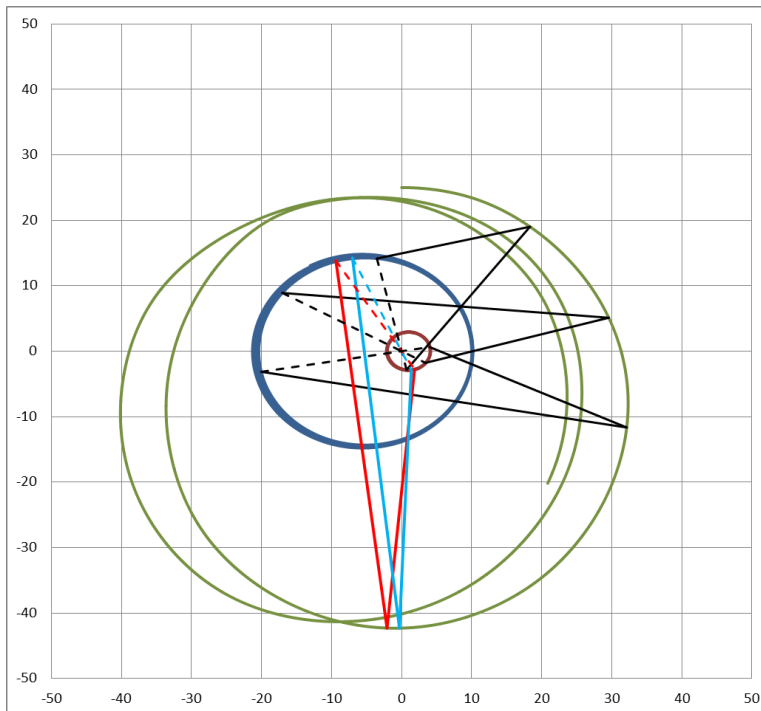
**Jegliche** nicht-kugelsymmetrische Verlagerung von Massen aus dem Zentrum nach außen führt zur **Vorwärts-Drehung** der Apsidenlinie (auch die relativistische Wirkung des Schwarzschild-Radius!) durch eine Verlagerung des „Virtuellen Schwerezentrums eines  $1/r^2$ -Kraftfeldes“ vom Systemschwerpunkt aus zum Planeten **hin**.

Gegensatz: Zusatzmassen zur kugelsymmetrischen Verteilung, die in der Rotationsachse der Trajektorie liegen, führen zu einer **Rückwärts-Drehung** durch eine Verlagerung des „Virtuellen Schwerezentrums“ vom Systemschwerpunkt aus vom Planeten **weg**.

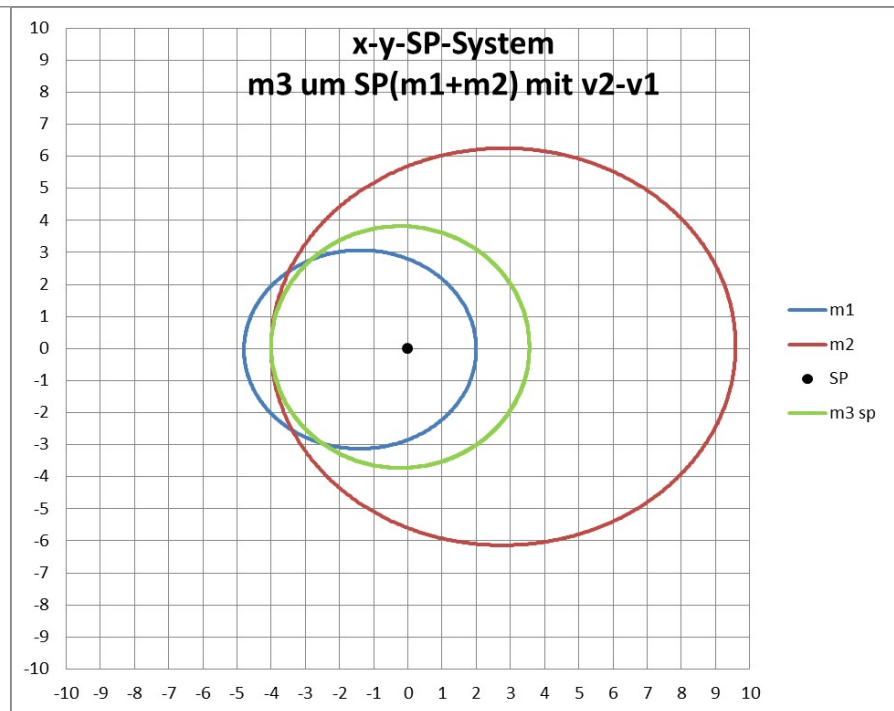
## 6) Weitere Ergebnisse des Spielens in der x-y-Ebene (4):

Beispiel von Planeten um Doppelstern

real gerechnet



um SP gerechnet

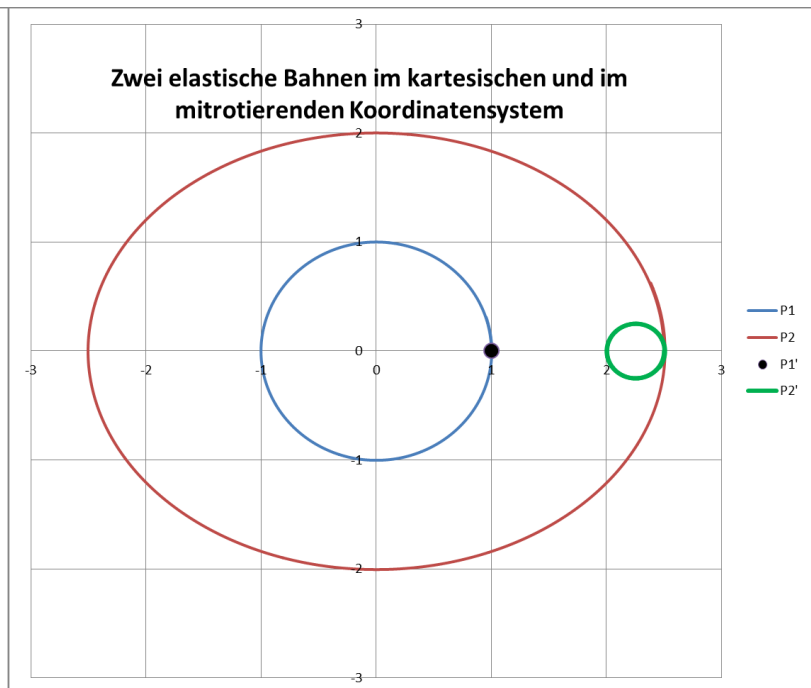
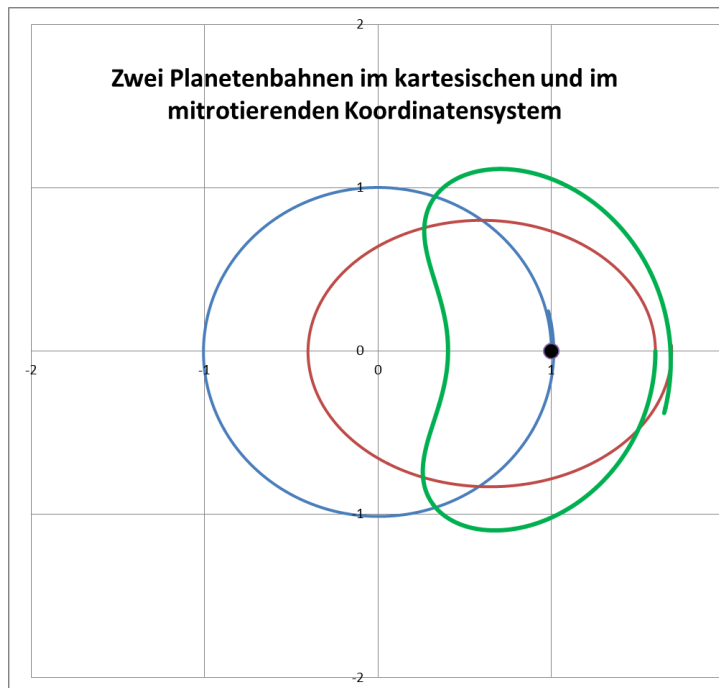


## 6) Weitere Ergebnisse des Spielens in der x-y-Ebene (5):

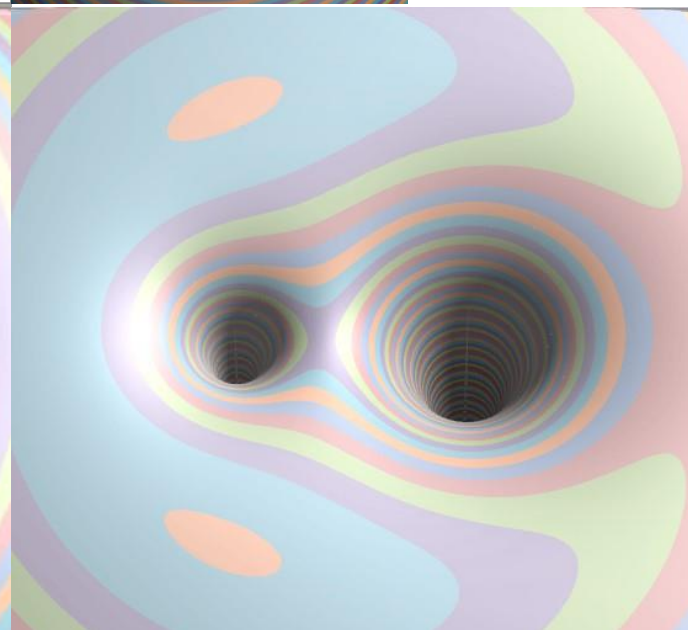
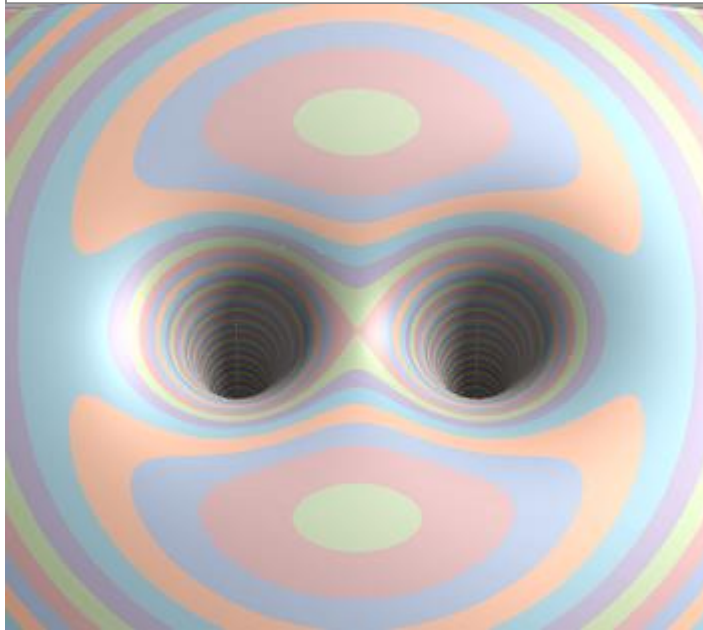
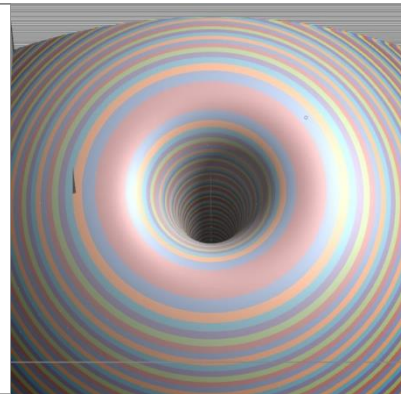
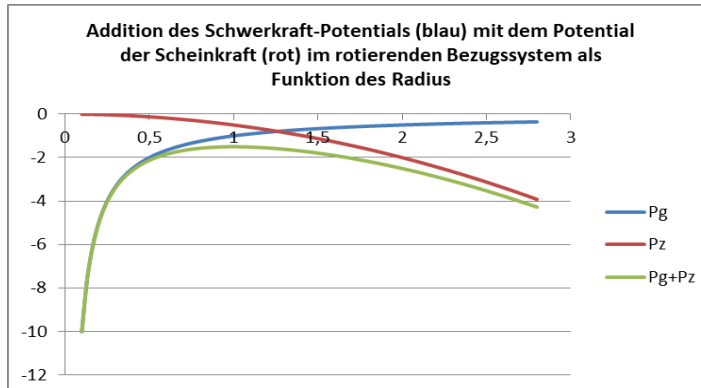
Darstellungen im rotierenden System:

gravitativ

elastisch zum Vergleich (Pendel)



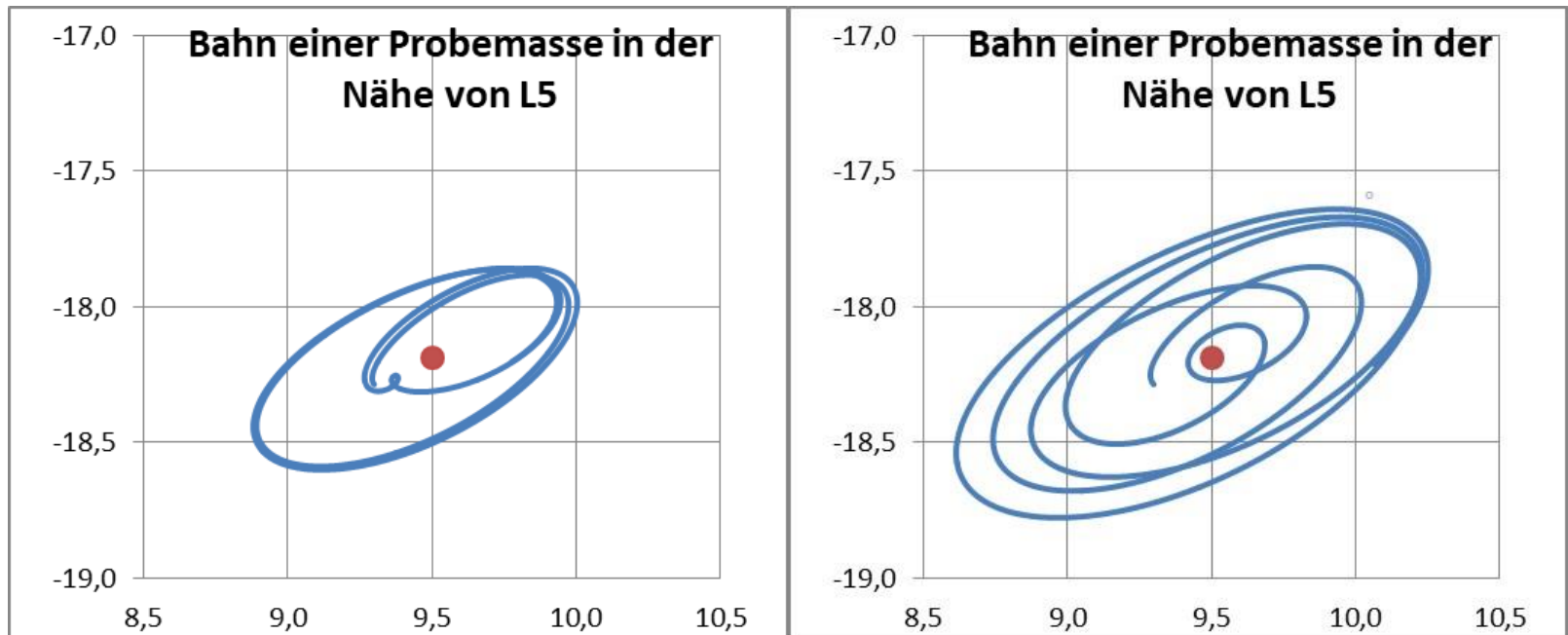
## 6) Weitere Ergebnisse des Spielens in der x-y-Ebene (6): Potential-Darstellungen im rotierenden System: Lagrange-Punkte



symmetrischer Doppelstern

unsymmetrischer

6) Weitere Ergebnisse des Vorgehens in der x-y-Ebene (7):  
Die relativ gute Stabilisierung der Bahn erfolgt über die Coriolis-Kraft, solange der Abstand zu den L-Punkten klein genug ist.





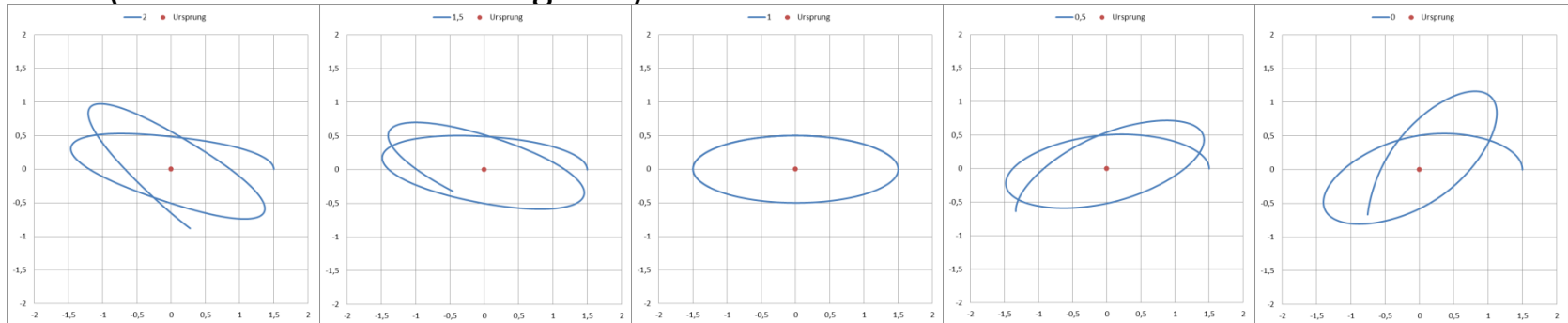
## AUSBLICK: Weitere Themen im Palitzsch-Museum

Ballistische Raketen-Bahn-Berechnung am Beispiel einer Druckluft-Wasser-Rakete (1,5 Liter) samt experimentellem Vergleich

Interplanetare Reisen und ihre Tücken („Schwungholen“)

# NACHBEMERKUNG 1 zum Exponenten des Kraftgesetzes: $\underline{F} = -\underline{r} * r^{\text{hoch } (p-1)}$

Man kann das für diverse p einmal durchspielen und erlebt zwei Ellipsen, die stabil sind (Kreise sind IMMER möglich!):



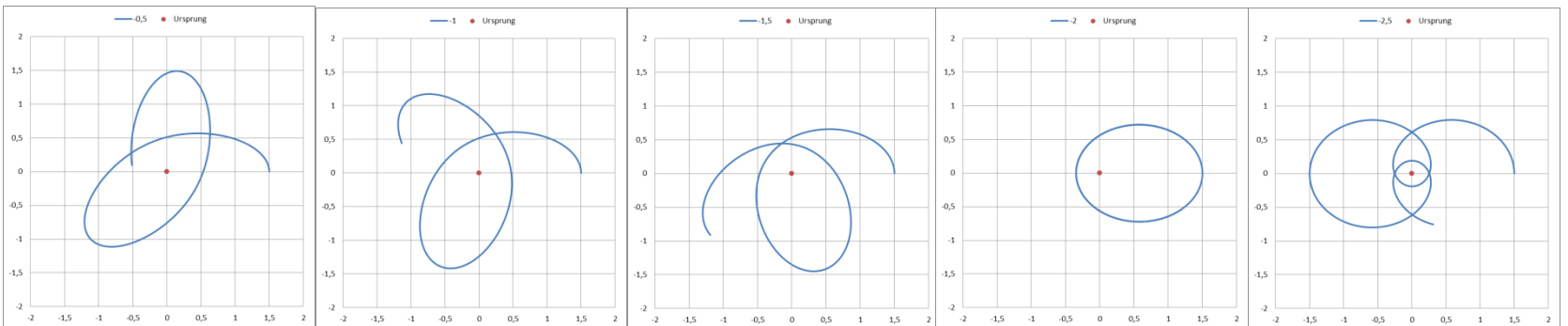
+2

+1,5

+1 stationär

+0,5

0



-0,5

-1

-1,5

-2 stationär

-2,5

Der „Drall“ (besser: das Eindrehen) wird mit sinkendem Exponenten „linker“.

Zweimal entstehen ortsfeste Ellipsen: die elastische (+1) und die gravitative (-2).

Dann lauten die Gesetze vektoriell  $\underline{F} = -\underline{r}$  und  $\underline{F} = -\underline{r} * r^{-3}$ , bekannt als  $F = 1/r^2$ .

**(Die Halbachsen der elastischen ergeben die Exzentrizität der gravitativen!)**

NACHBEMERKUNG 2 zum Exponenten des Kraftgesetzes:  $\underline{F} = -\underline{r} * r^{\text{hoch } (p-1)}$   
 Man kann das für diverse p einmal durchspielen und erlebt im mitrotierenden Bezugssystem (MITTLERE Winkelgeschwindigkeit!) eine Entwicklung der Schwingung um die Mittellage:

